Ejercicios y problemas de cálculo

Rubén Flores Espinoza
Marco Antonio Valencia Arvizu
Martín Gildardo García Alvarado
Rodrigo González González

Proyecto FOMIX
CONACYT, Gobierno del Estado
Clave: SON-2004-C02-008

Publicado por Editorial GARABATOS
Febrero, 2008
ISBN: 970-9920-19-2
Tiraje: 1000 ejemplares

Presentación

Puede decirse que la actividad de un científico es contribuir a conocer mejor el universo que habitamos y que la de un ingeniero es utilizar el ingenio para resolver problemas. Las matemáticas son un lenguaje que permite al científico expresar y precisar ese conocimiento y una herramienta que permite al ingeniero resolver problemas prácticos a partir de ese conocimiento. En cualquier disciplina, la práctica hace al maestro, y tratándose de matemáticas, la práctica a través de la resolución de problemas no solamente es muy importante, sino indispensable para comprender realmente el significado y alcance de sus diversas ramas y teorías. Sólo a través de la resolución de problemas se logran comprender los conceptos y los métodos y se consigue su integración al acervo cultural del estudiante y, lo que es más importante, sólo así se aprende a aplicarla en otras áreas del conocimiento y la técnica.

Por este medio, estamos poniendo al servicio de los estudiantes y profesores universitarios de los cursos de cálculo de las áreas de ciencias e ingeniería, una colección con más de cuatrocientos ejercicios y problemas sobre los distintos tópicos que cubren los cursos regulares de esta materia. Esta colección de *Ejercicios y problemas de Cálculo* tiene el propósito de complementar el texto *Fundamentos del Cálculo*, de los mismos autores, y, como tal, su organización y presentación corresponden a las de éste; sin embargo, puede utilizarse independientemente con cualquier otro libro de cálculo del mismo nivel y orientación, pues se ha procurado evitar referencias específicas al libro de texto.

El Cálculo es una de las herramientas matemáticas más poderosas que ha creado el hombre en virtud de la variedad y profundidad de sus aplicaciones, y por eso resulta aún más importante su buena comprensión y manejo. Basados en estas razones, los ejercicios y problemas aquí propuestos son de distintos niveles de dificultad, y buscan no sólo la mera aplicación de rutinas y métodos, sino que pretenden incitar al estudiante a pensar y adentrarse en los temas planteados, extendiendo y profundizando la teoría. Los ejercicios y problemas han sido divididos por capítulos y por grandes temas, y en dos niveles, según su grado de dificultad, pues hemos llamado ejercicios a los que requieren la aplicación más o menos rutinaria de los conceptos y técnicas del cálculo, y problemas a aquellas preguntas que requieren un pensamiento y una reflexión más elaborada. Por otra parte, con el fin de que sean utilizadas como guía y para brindar confianza al estudiante en su trabajo, se incluyen un buen número de respuestas y sugerencias a los problemas planteados, algunas de ellas desarrolladas con todo detalle.

Como mencionamos, este problemario está dirigido al área de ciencias e ingeniería y puede utilizarse en el diseño de los cursos de cálculo. Ha sido elaborado en el marco

del Proyecto "Homogenización y certificación de los cursos de matemáticas de las instituciones de educación superior en Sonora", apoyado por recursos del Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Sonora bajo registro SON-2004-C02-008.

Los autores expresan por este medio su agradecimiento al CESUES y a la Universidad de la Sierra por su apoyo institucional a la realización de dicho proyecto, así como a distintas personas que contribuyeron de maneras diversas a su realización, especialmente al Delegado de CONACYT en Sonora, Ing. Francisco Javier Ceballos y a su colaboradora, Lic. Laura Petra Reyes Medina. Agradecemos también a los CC.PP. Ricardo Efrén Espinoza, Angélica Pereida Hoyos y Blanca Irene López Fimbres, por su apoyo en la gestión administrativa al interior de la Universidad de Sonora durante el desarrollo de este proyecto, así como al Lic. Jorge Estupiñán Munguía y personal de la Dirección de Extensión Universitaria por su apoyo en la formalización del proceso de edición, publicación y presentación, primero de *Fundamentos del Cálculo*, y ahora de estos *Ejercicios y problemas de Cálculo.* Finalmente, nuestro reconocimiento a Editorial GARABATOS por su profesionalismo y la calidad de su trabajo.

Es nuestro propósito y nuestro deseo que el texto *Fundamentos del Cálculo* y esta colección de *Ejercicios y problemas de Cálculo* constituyan un incentivo y un apoyo para los profesores y para los estudiantes de Cálculo de las áreas de ciencias e ingeniería, y que contribuyan a homogenizar los cursos de esta importante materia. De avanzar en ese sentido, se lograría el objetivo de su publicación.

Hermosillo, Sonora, México.
Febrero del 2008.
Los autores

Contenido

Presentación **5**

1 Conocimientos previos **9**
- 1.1 Conjuntos . . . 9
- 1.2 Álgebra . . . 10
- 1.3 Geometría . . . 12
- 1.4 Trigonometría . . . 13
- 1.5 Geometría Analítica . . . 13

2 Los números reales **17**
- 2.1 Los números naturales . . . 17
- 2.2 Definición de número real . . . 18
- 2.3 Operaciones con números reales . . . 19
- 2.4 Densidad de los números reales . . . 19
- 2.5 Propiedad de orden en los números reales . . . 20
- 2.6 Completez . . . 21

3 Variables y funciones **27**
- 3.1 Concepto de variable y de función . . . 27
- 3.2 Gráficas . . . 29
- 3.3 Propiedades . . . 30
- 3.4 Operaciones . . . 32
- 3.5 Funciones trigonométricas . . . 33
- 3.6 Funciones trigonométricas inversas . . . 33

4 Sucesiones y límites **37**
- 4.1 Concepto de sucesión . . . 37
- 4.2 Convergencia de sucesiones . . . 38
- 4.3 Límite de funciones . . . 42
- 4.4 Límites y continuidad . . . 43

5 La derivada **49**
- 5.1 El concepto de derivada . . . 49

5.2 Cálculo de derivadas. Reglas de derivación 50
5.3 Interpretación física y geométrica. Aplicaciones 52

6 Teorema del valor medio y sus aplicaciones 61
6.1 Desigualdades y estimaciones 61
6.2 Comportamiento de funciones derivables 63
6.3 Teorema de Taylor y reglas de L'Hospital 66
6.4 Cálculo y aplicaciones de máximos y mínimos 67

7 La función exponencial y sus aplicaciones 79
7.1 Propiedades de exponenciales y logaritmos 79
7.2 Aplicaciones elementales 82

8 La integral indefinida 89
8.1 Concepto de antiderivada 89
8.2 Interpretación geométrica de la antiderivada 90
8.3 Métodos de integración 90
8.4 Antiderivadas diversas 91

9 La integral definida y el teorema fundamental del cálculo 103
9.1 La integral de Riemann de funciones continuas 103
9.2 El teorema fundamental del Cálculo 106
9.3 Integrales impropias 108

10 Aplicaciones de la integral definida 117
10.1 Cálculo de áreas y volúmenes 117
10.2 Cálculo de centroides y centros de masa 119
10.3 Cálculo de la presión hidrostática 120

11 Ecuaciones diferenciales elementales 125
11.1 Ecuaciones de primero y segundo orden 125
11.2 Aplicaciones elementales 129

12 Series 139
12.1 Convergencia de Series 139
12.2 Series de Potencias 144

Tabla de antiderivadas e integrales 156

Capítulo 1

Conocimientos previos

Para comprender y aplicar el Cálculo Diferencial e Integral son necesarios algunos conocimientos previos. Entre ellos se requiere conocer el concepto, la notación y las operaciones con conjuntos; dominar las operaciones algebraicas, resolver ecuaciones de primero y segundo grado, resolver sistemas de ecuaciones, conocer las progresiones aritméticas y geométricas y resolver desigualdades.

Por lo que se refiere a la geometría, conocer las propiedades de los triángulos, los cuadriláteros, los polígonos regulares y los círculos; calcular áreas y volúmenes de las figuras y cuerpos más conocidos. En cuanto a la trigonometría, conocer las relaciones trigonométricas, el círculo trigonométrico y las principales identidades trigonométricas con senos y cosenos.

En lo que corresponde a la geometría analítica, es importante conocer la manera de trazar la gráfica de ecuaciones algebraicas asociadas con rectas y secciones cónicas, es decir, saber interpretar geométricamente, en el plano cartesiano, las ecuaciones de primero y segundo grado. Y recíprocamente, dadas algunas propiedades geométricas, construir las ecuaciones que representa rectas y secciones cónicas, o sea, círculos, elipses, parábolas e hipérbolas.

Los ejercicios y problemas planteados a continuación buscan ayudar a recordar algunos de estos temas, sin pretender ser exhaustivos.

1.1 Conjuntos

Ejercicios

1. Sean los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathcal{B} = \{a, b, c, 1, 2, 5, 6, \alpha, \beta, \pi\},$$

$$\mathcal{C} = \{a, b, e, 1, 2, 3, 5, 6, \alpha, \beta, \delta, \rho\}.$$

Exhiba los elementos de los conjuntos siguientes:

(a) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
(b) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$
(c) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$
(d) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c) \cup \mathcal{C}$.

2. Demuestre las siguientes relaciones entre conjuntos:

(a) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{B}^c \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$
(b) $(\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) = \emptyset$
(c) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c) \cup (\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}) \subset (\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c)^c$.

Problema

3. Considere lo siguiente:

$\mathcal{U}$ = conjunto de todas las personas,

$\mathcal{A}$ = conjunto de personas nacidas en México,

$\mathcal{B}$ = conjunto de las personas menores de 30 años,

$\mathcal{C}$ = conjunto de hijos de padres mexicanos.

(a) Si para ser candidato a la presidencia de México se requiere tener más de 30 años y haber nacido en México de padres mexicanos, exprese el conjunto de los candidatos posibles en términos de los conjuntos $\mathcal{U}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y las operaciones conjuntistas.
(b) Escriba en términos de los conjuntos $\mathcal{U}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y de las operaciones conjuntistas el conjunto $\mathcal{X}$ de las personas que no pueden ser presidente de México.

1.2 Álgebra

Ejercicios

4. Si las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ son $\ln 2$ y π, encuentre el valor de b.

5. Encuentre la suma de todas las soluciones de la ecuación

$$| 2x + 4\sqrt{2} | + | x - \sqrt{2} | = 9\sqrt{2}.$$

6. Encuentre los valores de x para los cuales la expresión $\dfrac{x^2 - 9}{x - 4}$ es positiva.

7. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 13x} \leqslant 0$.

8. Calcule el valor V de la expresión

$$V = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

9. Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes:

   (a) $x^2 - 7x = -12$

   (b) $\dfrac{2x-1}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x-1} = \dfrac{10}{3}$

   (c) $\sqrt{4x+1} = 3 - 3x$

   (d) $x^3 - 7x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0.$

10. (a) Exprese las variables u y v en términos de r y s :

$$\begin{aligned} 2u - v &= -5s \\ 3u + 2v &= 7r - 4s. \end{aligned}$$

   (b) Exprese las variables x y y en términos de a y b :

$$\begin{aligned} ax - by &= a^2 + b^2 \\ 2bx - ay &= 2b^2 + 3ab - a^2. \end{aligned}$$

Problemas

11. Sean x, y, z números en progresión geométrica de razón r. Si $x, 2y$ y $3z$ están en progresión aritmética, ¿cuál es el valor de r?

12. Resuelva la ecuación $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$.

13. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 19 \\ x^2 + xy + y^2 &= 19. \end{aligned}$$

14. ¿Cuál es la suma de todas las soluciones de la ecuación $|x^2 - 6x| = 2$?

15. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales. Pruebe los enunciados siguientes:

   (a) Un número natural n es par si y sólo si n^2 es par.

   (b) Un número natural n es impar si y sólo si n^2 es impar.

   (c) El cuadrado de un número natural es múltiplo de tres si y sólo si el número es múltiplo de tres.

16. Encuentre la velocidad de una lancha en aguas en reposo, y la velocidad de la corriente de un río, sabiendo que tarda 3 horas en recorrer una distancia de 45 Km contra la corriente y dos horas a favor de la corriente.

17. Un depósito A contiene 400 litros de una solución salina con una cantidad de sal de 8 Kg. Otro depósito B tiene 120 litros de una solución con 6 Kg de sal disuelta. Hallar el volumen que se debe extraer de cada uno de ellos para formar 30 litros de solución cuya concentración sea de 0.03 Kg por litro.

18. Hallar dos números tales que la suma de sus cuadrados sea 34 y que uno de ellos, aumentado en una unidad, sea igual al doble del otro.

19. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 60 cm y su hipotenusa mide 25 cm. Hallar las longitudes de los otros lados.

20. Hallar la velocidad que lleva un automóvil sabiendo que si la aumenta en 10 Km por hora recorrería 120 Km en 36 minutos.

21. Dos personas parten de un mismo punto siguiendo caminos perpendiculares. Sabiendo que la velocidad de una de ellas es de 4 Km por hora más que la otra y que al cabo de 2 horas la distancia entre ellas es de 40 Km, encuentre sus velocidades.

22. Un comerciante compró cierto número de unidades de un artículo por $14.40 pesos. Posteriormente, el precio de dicho artículo sufrió un aumento de 2 centavos por unidad, con lo cual, por el mismo dinero, le dan ahora 24 unidades menos que la vez anterior. Hallar las unidades que inicialmente compró y el precio de cada una de ellas.

1.3 Geometría

Ejercicios

23. Un rombo está inscrito en un rectángulo de base x y perímetro 20 m. Si los vértices del rombo son los puntos medios de los lados del rectángulo, exprese el área del rombo en términos de la longitud x de la base del rectángulo.

24. Dos triángulos, ABC y ADC, son como se indica en la figura 1.1. Los ángulos ACB y ADC son rectos. Si $\overline{AB} = 20$, $\overline{AD} = 8$, y $\theta = 20°$, calcule la parte entera del valor de α.

25. Considere un triángulo oblicuángulo con lados $a = 12$, $c = 5$, y ángulo $B = 130°$. Si el lado b es opuesto al ángulo B, ¿cuánto mide b?

26. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y de un cuadrilátero es 360°. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados?

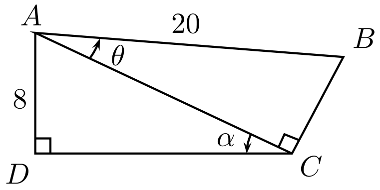


Figura 1.1 Diagrama para el problema 24

Problema

27. Encuentre el radio del círculo C si un ángulo central de $220°$ intercepta un arco de longitud 5.9 cm. Exprese su respuesta con una aproximación de 1 mm.

1.4 Trigonometría

Ejercicios

28. Si $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{5}$ y $\sec\theta < 0$, encuentre los valores de $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

29. El triángulo de vértices A, B y C es tal que las longitudes de los lados AB yAC miden 12 y 15 centímetros, respectivamente, y hacen un ángulo entre ellos de $135°$. Calcule la longitud del lado BC.

30. Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}^2 t\cos t + \cos^3 t}{\cos t}$.

31. Un piloto vuela en línea recta por dos horas y luego cambia de dirección en 15 grados a la derecha de su dirección original y vuela por otras tres horas. Si la velocidad del avión es de 225 Km por hora, ¿a qué distancia se encuentra del punto de partida?

32. Sea un cuadrado con vértices A, B, C y D, donde el vértice A es diagonalmente opuesto al vértice C. Si M y N son los puntos medios de los lados BC y CD, respectivamente, ¿cuál es el valor de $\cos\theta$, donde θ es el ángulo MAN?

Problema

33. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $2\operatorname{sen}^2(3x+4) = 1$.

1.5 Geometría Analítica

Ejercicios

34. Encuentre el valor de k para que la recta que pasa por $(1, k)$ y el punto $(2, 3)$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(7, 5)$.

35. Encuentre la ecuación de la hipérbola con focos en $(8, 1)$ y $(8, 9)$ y tiene un vértice en $(8, 6)$.

36. Encuentre el punto sobre el eje de las ordenadas que sea equidistante de los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 6)$.

37. Si $A = (-3, 6)$ y $B = (12, 3)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto sobre el segmento que se encuentra alejado de A dos terceras partes de la longitud del segmento AB?

38. ¿Cuál es la ecuación de la recta que une el vértice de la parábola $y = 2x^2-4x+3$ con el centro del círculo $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0$?

Problemas

39. Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio 8 que es tangente a las dos ramas de la curva $y = |x|$.

40. Determine el área de la región delimitada en su parte inferior por la circunferencia $x^2+y^2 = 4$ y en la parte superior por la gráfica de la curva $y = -|x|+2$.

Respuestas y sugerencias

4. $b = -(\pi + \ln 2)$

5. $3\sqrt{2}$

6. Las soluciones son los números del conjunto $(-3, 3) \cup (4, \infty)$.

7. $(-13, 0) \cup (0, 1]$.

8. $V = \dfrac{n+1}{n}$

9a. $x_1 = 3, x_2 = 4$. 9b. $x_1 = -7, x_2 = 1$. 9c. $x_1 = \dfrac{4}{9}, x_2 = 2$. 9d. $x_1 = 2, x_2 = 4$.

11. $r = \dfrac{1}{3}$ si suponemos que x, y y z son números distintos.

12. $x = 1$

13. $x = 4, y = 3$ y $x = 3, y = 2$.

14. 12

17. Sea x la cantidad a remover del depósito A y $30-x$ la cantidad a remover de B. En x litros de A hay $\dfrac{x}{50}$ Kg de sal y en $30-x$ de B hay $(30-x)\frac{1}{20}$ Kg de sal. La concentración de la mezcla será $\dfrac{1}{30}\left[\dfrac{x}{50}+(30-x)\dfrac{1}{20}\right]$ y será igual a $\dfrac{3}{100}$. Así, $\dfrac{1}{30}\left[\dfrac{x}{50}+(30-x)\dfrac{1}{20}\right]=\dfrac{3}{100}$, o, $2x+150-5x=90$, de donde se obtiene que $x=20$. Es decir, hay que remover 20 litros de A y 10 litros de B.

18. $x_1=3, y_1=5; x_1=-2.2, y_1=-5.4$.

19. $a=15, b=20$.

20. $v=190$ Km/h.

21. $v_1=12$ Km/h, $v_2=16$ Km/h.

22. Si p el precio inicial por artículo, compró $\dfrac{14.40}{p}$ artículos. Si ahora el precio es $p+\dfrac{2}{100}$ se tiene que $\dfrac{14.40}{p+\frac{2}{100}}=\dfrac{14.40}{p}-24$, es decir, $\dfrac{1440}{100p+2}=\dfrac{14.40-24p}{p}$. Luego, $-2400p^2-48p+28.80=0$, o, $100p^2+2p-1.20=0$, de donde $p=\dfrac{-1+\sqrt{1+120}}{100}=\dfrac{1}{10}$. Por lo tanto, el número de artículos comprados incialmente fue de 144.

23. $A=x(10-x)$

24. $\alpha=25°$

25. $b=24.50$

26. $180(n-2)°$

27. $r=\dfrac{(5.9)(18)}{22\pi}$ cm.

28. $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}, \quad \tan\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

29. Use la ley de los cosenos.

30. sen t

31. Use la ley de los cosenos.

32. $\cos\theta=4/5$

33. Las soluciones son de la forma $x_1=\dfrac{8n\pi+\pi-16}{12}$, $x_2=\dfrac{8n\pi+3\pi-16}{12}$, $x_3=\dfrac{8n\pi-\pi-16}{12}$, $x_4=\dfrac{8n\pi-3\pi-16}{12}$ para n entero.

34. $k = 11/4$
35. $15(x-8)^2 - (y-5)^2 = 15$
36. $(0, 4)$
37. $(7, 4)$
38. $4x + y = 5$
39. $x^2 + (y - 8\sqrt{2})^2 = 64$
40. $A = 2\pi + 4$

Capítulo 2

Los números reales

En este capítulo se propone una serie de ejercicios y problemas para reforzar el conocimiento y el manejo de las operaciones y propiedades de los números reales que son relevantes para el cálculo diferencial e integral. Se incluyen reactivos sobre la representación decimal de números reales y las propiedades del orden, especialmente las relativas a la densidad y a la completez de este sistema.

2.1 Los números naturales

Ejercicios

1. Pruebe que el producto de dos números naturales pares es par; de dos números naturales impares es impar y el producto de un número par con uno impar es impar.

2. Muestre que el producto de dos números naturales que no son divisibles por 3 no es divisible por 3.

3. Sea $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ una ecuación de tercer grado con p, q y r números naturales. Pruebe que si α es un número racional que es solución de la ecuación, entonces α es entero y divide al término independiente r.

4. Sean $p(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x - 6$ y $q(x) = x^3 - 8x^2 + 4$. Encuentre polinomios $m(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = q(x)m(x) + r(x)$ con grado de $r(x) <$ grado de $q(x)$.

Problemas

5. Sean m y n números naturales. Muestre que el número de números naturales que no son mayores que n y que son divisibles por m es igual al cociente de dividir n por m.

6. Pruebe, aplicando el algoritmo de la división, que cada número natural es la suma de potencias enteras no negativas de 2 (es decir, de términos de la forma 2^k con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) y que cada potencia que aparece como sumando lo hace una sóla vez.

7. Dados dos números naturales m y n, si existen enteros a y b tales que $ma+nb = 1$ entonces m y n son primos relativos. Recíprocamente, dos enteros m y n son primos relativos si existen enteros a y b tales que $ma + nb = 1$.

8. **Principio de Inducción** *"Si un subconjunto C de números naturales tiene las propiedades siguientes: el número 1 pertenece a C y si $k \in C$ implica que $k + 1 \in C$, entonces $C = \mathbb{N}$."*

   Aplicando el Principio de Inducción, demuestre la validez de las fórmulas siguientes para cada número natural n:

   (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{2}{3^n} = 1 - \dfrac{1}{3^n}$

   (c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

   (e) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

   (f) $n < 2^n$.

2.2 Definición de número real

Ejercicios

9. Escriba la expansión decimal correspondiente a los números racionales siguientes y determine, en cada caso, el bloque de dígitos que se repite:

   (a) $\dfrac{23}{7}$

   (b) $-\dfrac{57}{4}$

   (c) $\dfrac{2491}{990}$.

10. Exprese como un cociente los números racionales cuyas expansiones decimales son

    (a) $A = 2.34\overline{210}$

(b) $B = 37.2856\overline{0}$

(c) $C = -13.3\overline{45}$.

11. Demuestre que el número $\sqrt{8}$ no es un número racional.

12. Demuestre que $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$ no son números racionales.

13. Pruebe que el conjunto de números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ forman un campo que contiene a $\sqrt{2}$.

Problema

14. Pruebe que si b es un primo relativo de 10, entonces el período de la expansión decimal del número $\frac{a}{b}$ empieza justo enseguida del punto decimal.

2.3 Operaciones con números reales

Ejercicios

15. Considere las expansiones $A = 2.3458\overline{0}$, $B = -3.2568\overline{0}$ y $C = -1.35802\overline{0}$. Calcule las expansiones de $A + B$, $A \cdot B$, $B \cdot C$ y $B - C$.

16. Calcule la expansión decimal completa de la suma $p + q$ de los números racionales p, q cuyas expansiones decimales son $p = 2.\overline{34}$, $q = -3.\overline{5}$.

17. Encuentre la expansión truncada de orden 5 de la suma $A + B$ de los reales $A = 1.28288288828888\cdots$, $B = 12.\overline{253}$.

18. Conteste Verdadero o Falso en cada reactivo.

(a) Si A es un número real distinto de cero, entonces existe otro número real B tal que $A \cdot B = 2$.

(b) Existe un número real A tal que $A^2 + A + 1 = 0$.

(c) El producto de dos números reales irracionales es un número irracional.

2.4 Densidad de los números reales

Ejercicios

19. Sean p y q dos números racionales con $p < q$. Encuentre un número racional r tal que $p < r < q$.

20. Dé la expresión racional de un número irracional entre los números $0.0001\overline{0}$ y $0.001\overline{0}$.

21. Sea $A = 2.13113\overline{0}$, encuentre un racional cuya distancia a A sea menor que $\frac{1}{10^4}$. Encuentre un irracional con la misma propiedad.

22. Muestre que entre cada par de números racionales distintos siempre hay un número irracional y que entre cada par de irracionales distintos existe siempre un número racional.

2.5 Propiedad de orden en los números reales

Ejercicios

23. Conteste VERDADERO o FALSO en cada reactivo.

    (a) Si A y B son números reales con $A < B$, entonces $A < \frac{A+B}{2} < B$.

    (b) Si $A^2 \leqslant A$, entonces $|A| \leqslant 1$.

24. Demuestre que si A es un número real distinto de cero, entonces $A^2 > 0$.

25. Demuestre que $\big||A| - |B|\big| \leqslant |A - B|$ para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$.

26. Demuestre la desigualdad siguiente:

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|}{1 + |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|} \leqslant \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} + \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \cdots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|}.$$

27. Exprese el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |2x + 1| \leqslant 3 \text{ y } |x - 1| > 1\}$ como unión de intervalos.

28. Escriba como unión de intervalos ajenos los conjuntos siguientes:

    (a) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |4x + 1| - |x - 1| > x - 2\}$

    (b) $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |x - 3| \leqslant 2|x|\}$

    (c) $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |2x - 3| > 2 \text{ y } |x - 5| < 1\}$.

Problema

29. Demuestre las desigualdades

$$\sqrt[m]{a + b} \leqslant \sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b} \qquad \text{y} \qquad |\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}| \leqslant \sqrt[m]{|a - b|},$$

para cualesquiera dos números reales $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ y m un entero positivo.

2.6 Completez

Ejercicio

30. Proporcione un conjunto acotado de expansiones decimales periódicas cuyo infimum y cuyo supremum no sean expansiones decimales periódicas.

Problemas

31. Determine el *supremum* y el *infimum* del conjunto de números reales

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \quad \text{con } m, n \text{ enteros positivos} \right\}.$$

32. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos de números reales acotados superiormente, demuestre las afirmaciones siguientes:

    (a) $\sup \mathcal{A} \leqslant \sup \mathcal{B}$, para $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$
    (b) $\sup(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \sup \mathcal{A} + \sup \mathcal{B}$
    (c) $\sup \mathcal{A} = -\inf(-\mathcal{A})$
    (d) $\inf(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \inf \mathcal{A} + \inf \mathcal{B}$.

    En 32b y 32d, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ denota el conjunto de números reales de la forma $a + b$ con $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$. En 32c, $-\mathcal{A}$ denota el conjunto de números reales de la forma $-a$ con $a \in \mathcal{A}$.

Respuestas y sugerencias

2. Si m y n no son divisibles por 3, entonces $m = 3k+j$ y $n = 3p+q$, con $k, p \in \mathbb{N}$ y $j, q = 1$ o 2. En este caso, $mn = 3(3kp + kq + pj) + jq$. El producto jq sólo toma uno de los valores 1, 2, o 4. En los primeros dos casos ($jq = 1$ o 2) se tiene que que mn no es divisible por 3. En el caso en que $jq = 4$, podemos escribir $mn = 3(3kp + kq + pj + 1) + 1$, el cual no es divisible por 3.

3. Supongamos que $\alpha = \dfrac{m}{n}$, con m y n primos relativos. Sustituyendo en la ecuación dada se tiene

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 + p\left(\frac{m}{n}\right)^2 + q\left(\frac{m}{n}\right) + r = 0.$$

Multiplicando por n^3 obtenemos que

$$m^3 + pm^2n + qmn^2 + rn^3 = 0. \tag{2.1}$$

Al sumar $-rn^3$ en ambos lados resulta que

$$m^3 + pm^2n + qmn^2 = -rn^3.$$

Factorizando m en el lado izquierdo:

$$m(m^2 + pmn + qn^2) = -rn^3.$$

Como m divide al lado izquierdo, también debe dividir a $-rn^3$. Pero como m no divide a n, se concluye que m divide a r.

Si ahora, a partir de (2.1), sumamos a ambos lados el término $-m^3$ encontramos que

$$pm^2n + qmn^2 + rn^3 = -m^3.$$

Factorizando n en el lado izquierdo:

$$n(pm^2 + qmn + rn^2) = -m^3.$$

Como n divide al lado izquierdo, también divide a $-m^3$. Pero m y n son primos relativos; luego $n = \pm 1$. Así que α es entero y divide a r.

4. $m(x) = x^2 + 10x + 74$, $r(x) = 588x^2 - 39x - 302$.

6. Sea n el número natural en cuestión. Sea k_1 el máximo número natural tal que 2^{k_1} es menor o igual que n. Sea $n_1 = n - 2^{k_1}$. Si $n_1 = 0$, entonces $n = 2^{k_1}$ y ya hemos terminado. Si $n_1 > 0$, sea k_2 el máximo número natural tal que 2^{k_2} es menor o igual que n_1. Obviamente $k_2 < k_1$. Sea $n_2 = n_1 - 2^{k_2}$. Si $n_2 = 0$, entonces $n = 2^{k_1} + n_1 = 2^{k_1} + 2^{k_2}$, y ya hemos terminado. Si $n_2 > 0$, sea k_3 el máximo número natural tal que 2^{k_3} es menor o igual que n_2. Obviamente $k_3 < k_2$. Como la sucesión de números naturales $\{k_1, k_2, \ldots\}$ es decreciente, eventualmente encontraremos que k_n es 1 o 0. En el primer caso tendremos que $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_{n-1}} + 2^0$, mientras que en el segundo tendremos $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_{n-1}}$.

7. Usaremos el siguiente resultado: si $n \neq 0$ y $m = nq + r$, entonces mcd(m, n) =mcd(n, r), donde “mcd” significa “máximo común divisor.” La demostración de este resultado es como sigue. Sean d =mcd(m, n) y c =mcd(n, r). Como d divide a m y a n, se sigue que d divide a $m - qn = r$. Así, d divide a r y a n. Esto implica que d divide a c. Por otra parte, como c divide a r y a n, se sigue que c divide a $r + qn = m$. Así, c es divisor de m y n, de donde c divide a d. Como d divide a c y c divide a d se concluye que $c = d$.

Aplicando el algoritmo de la división repetidamente encontramos que

$$\begin{array}{lll} m = nq + r, & \text{con} & 0 < r < n, \\ n = rq_1 + r_1, & \text{con} & 0 < r_1 < r, \\ r = r_1 q_2 + r_2, & \text{con} & 0 < r_2 < r_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & \text{con} & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1}. & & \end{array}$$

La sucesión de residuos eventualmente tomará el valor $r_{n+1} = 0$, ya que la sucesión de enteros no negativos $b, r_2, r_3, \ldots$ es monótona decreciente, y no puede tener más de b términos estrictamente positivos.

Aplicando el resultado anterior repetidamente, concluimos que $\text{mcd}(m, n) = \text{mcd}(n, r_2) = \text{mcd}(r_2, r_3) = \cdots = \text{mcd}(r_{n-1}, r_n) = r_n$. De manera que el último residuo no nulo obtenido mediante el algoritmo de la división es el máximo común divisor de m y n. De la penúltima expresión, obtenemos $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1}$, y sustituyendo de manera recursiva los residuos r_{n-1}, r_{n-2}, $\ldots$, r_3, r_2, encontramos una expresión para r_n =mcd(m, n) en la forma $r_n = ma + nb$. En el caso particular en el que m y n son primos relativos, se concluye que existen enteros a y b tales que $1 = ma + nb$.

8f. Sea C el conjunto de los números naturales n que satisfacen $n < 2^n$. Obviamente $1 \in C$. Supongamos que algún número natural k está en C. Como $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k > k + 1$, se concluye que $k + 1$ está también en C. Entonces $C = \mathbb{N}$.

9b. $-\dfrac{57}{4} = -14.25\overline{0}$.

10a. $A = \dfrac{233976}{999000}$.

11. $\sqrt{8}$ no es un número racional, ya que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ no es un racional.

12. En general, si r es un número primo, $\sqrt{r}$ es irracional. Siga la misma demostración que para $\sqrt{2}$ tomando en cuenta que p^2 es múltiplo de r si y sólo si p también lo es.

13. Basta probar la cerradura y la existencia de inversos para la suma y la multiplicación porque 0 y 1 están en el conjunto en cuestión.

15. $B - C = -1.898780$

16. Escribiendo p y q en forma racional y efectuando la suma se tiene

$$p = \frac{232}{99}, \; q = -\frac{32}{9}, \; p + q = -\frac{40}{33} = -1.\overline{21}.$$

17. $(A+B)_5 = 13.53613$

18a. Verdadero; 18b. Falso

19. Por ejemplo $\dfrac{p+q}{2}$.

20. Por ejemplo $A = 0.000101001000100001\ldots$

21. Por ejemplo $B = 2.13112\overline{0}$ y $C = 2.1311201001000100001\ldots$

22. Si ambos números son racionales, tome la respuesta del ejercicio 19. Si ambos números son irracionales, supongamos que $p < q$. Entonces,

    i) Si $q-p > 1$, tomamos $p+1$;

    ii) Si $q-p = 1$, tomamos $q - 0.1$;

    iii) Si $q-p < 1$ y r es el lugar del primer dígito donde difieren p y q, tomamos el número que resulta de restar una unidad al dígito de q en el lugar $r+1$; si éste es cero, restemos la unidad del primer dígito no nulo después del lugar $r+1$.

23a. Verdadero; 23b. Falso (por ejemplo, considere $A = -0.5$).

24. Si $A > 0$, $A^2 = A \cdot A > A \cdot 0 = 0$;
    Si $A < 0$, $-A > 0$ y $A^2 = (-A)^2 = 0$.

25. Aplique la desigualdad del triángulo a $|A| = |(A-B)+B|$.

26. Utilizando la desigualdad del triángulo y las propiedades de las operaciones entre los reales se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\cdots+a_n|} &\leqslant \frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{1+|a_1+a_2+\cdots+a_n|} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|} + \dfrac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}} \\
&\leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}+1} \\
&= \frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{1+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|} \\
&\leqslant \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{|a_2|}{1+|a_2|} + \cdots + \frac{|a_n|}{1+|a_n|}.
\end{aligned}$$

27. Los números reales x tales que $|2x+1| \leqslant 3$ son aquéllos tales que $2x+1 \leqslant 3$ y $2x+1 \geqslant -3$. Estas desigualdades se satisfacen si $x \leqslant 1$ y $x \geqslant -2$; es decir, si $x \in [-2, 1]$. La desigualdad $|x-1| > 1$ se satisface si $x-1 > 1$ o $x-1 < -1$;

es decir, $x > 2$ o $x < 0$, o, lo que es lo mismo, $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Así, los números x que satisfacen la desigualdad dada están en la intersección de los intervalos $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ con el intervalo $[-2, 1]$; es decir, $A = [-2, 0)$.

28a. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$; 28b. $\mathcal{B} = (-\infty, -3/2] \cup [1, \infty)$; 28c. $\mathcal{C} = [4, 6]$.

29. De la fórmula del binomio de Newton se tiene

$$(\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b})^m = a + b + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-1)!} (\sqrt[m]{a})^k (\sqrt[m]{b})^{m-k} \geqslant a + b$$

y entonces $(\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}) \geqslant \sqrt[m]{a+b}$. La prueba de la segunda desigualdad es similar a la anterior.

30. Considere el conjunto $\mathcal{A} = \{\pm 1,\ \pm 1.\overline{4},\ \pm 1.4\overline{1},\ \pm 1.41\overline{4},\ \pm 1.414\overline{2},\ \pm 1.4142\overline{1},\ \pm 1.41421\overline{3},\ \ldots\}$. El conjunto $\mathcal{A}$ es acotado y su infimum y su supremum son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, respectivamente.

31. $\sup \mathcal{A} = \dfrac{9}{4}$ e $\inf \mathcal{A} = 0$.

32a. Por definición se tiene que $\sup \mathcal{B} \geqslant b$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Entonces, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, se tendrá que $\sup \mathcal{B} \geqslant a$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Esto significa que $\sup \mathcal{B}$ es una cota superior para el conjunto $\mathcal{A}$. Como $\sup \mathcal{A}$ es menor o igual que cualquier cota superior de $\mathcal{A}$, se concluye que $\sup \mathcal{A} \leqslant \sup \mathcal{B}$.

Capítulo

3 Variables y funciones

3.1 Concepto de variable y de función

Ejercicios

1. Considere la regla de correspondencia f que asocia a cada persona con su madre.

    (a) ¿Define f una función?

    (b) ¿Cuál es el dominio de tal función?

    (c) ¿Cuál es la imagen de dicha función?

    (d) ¿Es esta función uno a uno?

2. Considere las variables reales siguientes:

    $y =$ "valor del área del triángulo equilátero",

    $x =$ "valor de la longitud del lado del triángulo equilátero",

    $z =$ "valor del perímetro del triángulo equilátero",

    $w =$ "valor de la altura del triángulo equilátero".

    Escriba:

    (a) la variable y en función de la variable x,

    (b) la variable y en función de la variable z,

    (c) la variable w en función de la variable y,

    (d) la variable x en función de la variable z,

    (e) la variable x en función de la variable y.

3. Considere la regla de correspondencia $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

   (a) ¿Cuál debe ser el dominio de la variable independiente x para que la regla defina una función real de variable real?

   (b) ¿Cuál es la imagen de la función?

4. Exprese el área A de los triángulos isósceles de perímetro 10 como función de la longitud ℓ de los lados iguales. Señale el dominio de la función y la regla que la define.

5. Exprese el área A de los triángulos isósceles de perímetro 10 como función del ángulo θ entre los lados iguales. Señale el dominio de la función y la regla que la define.

6. Para cada recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y un punto sobre el intervalo $\mathcal{A} = (0, \infty)$ exprese la ordenada y del punto que intersecta la recta sobre el eje de las ordenadas en función de la pendiente m de la recta.

7. Exprese el área A de una esfera como función de su volumen V.

8. Considere la familia de parábolas $y = x^2 + cx + 2$. Exprese la suma de las abscisas de los puntos de intersección de cada parábola con el semieje positivo de las x en función del parámetro c. Señale el dominio de la función y diga si la función es uno a uno.

9. Exprese la regla de correspondencia o función $y = f(x)$ entre la variable x y la variable y en los casos siguientes:

   (a) $x =$ "valor del ángulo formado por los lados iguales de un triángulo isósceles de perímetro 12" y $y =$ "valor del área de un triángulo isósceles de perímetro 12".

   (b) $x =$ "valor del área de una esfera" y $y =$ "valor del radio de una esfera".

10. ¿Cuál es la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x - 1}{|x| + 1}$?

Problema

11. Un faro situado a 10 km de la costa gira a razón de 10 revoluciones por minuto. Si en $t = 0$ el rayo de luz del faro incide en el punto P en la costa más cercano al faro, exprese la posición del rayo de luz a lo largo de la costa medida desde el punto P como función del tiempo, suponiendo que la costa es recta. Señale el dominio de la función y diga si es uno a uno.

3.2 Gráficas

Ejercicios

12. A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$, que se muestra en la figura 3.1 conteste las preguntas siguientes:

    (a) ¿Cuál es el dominio de f?

    (b) ¿Cuál es el contradominio de f?

    (c) ¿En cuál intervalo es f creciente? ¿En cuál intervalo es decreciente?

    (d) ¿Para qué intervalos (a, b) de su dominio tiene f función inversa? Si este es el caso, ¿cuál es el dominio y cuál el contradominio de la inversa?

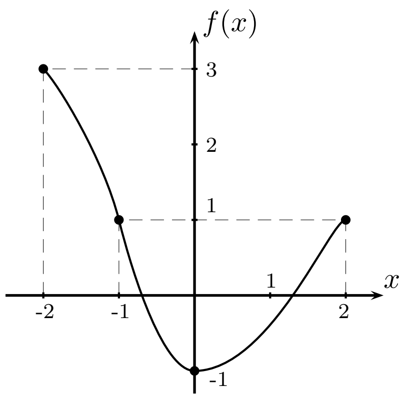


Figura 3.1 Gráfica de la función del problema 12.

13. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones con dominio y contradominio el conjunto de los números reales.

    (a) $f(x) = |2x + 3|$

    (b) $f(x) = [x]$ =máximo entero menor o igual a x

    (c) $f(x) = f(x) = x - [x]$

    (d) $f(x) = x + |x^2 + 3x + 1|$.

14. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toma los valores $f(0) = 1$ y $f(2) = 1$ y su gráfica está formada de segmentos de recta con pendiente -1 si $x < 0$, pendiente 0 en $[0, 2]$ y pendiente 1 si $x > 2$. Dibuje la gráfica de la función g en cada uno de los casos siguientes:

    (a) $g(x) = f(x)$

    (b) $g(x) = -f(-x)$

(c) $g(x) = f(2x)$
(d) $g(x) = f(x+2)$
(e) $g(x) = f(3x-2)$.

15. Considere la función $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Grafique $f(x)$ en cada caso:

(a) $f(x) = x \operatorname{sgn}(x)$
(b) $f(x) = (3x+2)\ (\operatorname{sgn}(3x+2)+5)$
(c) $f(x) =$ mayor entero menor o igual a x. Recuerde que esta función se denota por $[x]$.
(d) $f(x) = x - [x]$.

Problema

16. Considere la gráfica de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Escriba la función $g(x)$ cuya gráfica se obtiene de la gráfica de f como se dice a continuación.

(a) Trasladando graf f dos unidades hacia arriba.
(b) Trasladando graf f tres unidades a la izquierda.
(c) Reflejando graf f sobre el eje de las abscisas.
(d) Reflejando graf f sobre el eje de las ordenadas.
(e) Encogiendo graf f por un factor de 2 y trasladando a la derecha 3 unidades.

3.3 Propiedades

Ejercicios

17. Encuentre, si existe, la función inversa de la función $f(x) = \dfrac{x-4}{x-1}$.

18. Pruebe que las funciones siguientes son uno a uno (es decir, inyectivas) y determine su función inversa.

(a) $f : \mathbb{R} \to [1, \infty), \quad y = f(x) = x^2 + x + 1.$
(b) $l : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad y = l(x) = x^2 + x + 1.$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = h(x) = 2x + 3.$

19. Pruebe que toda función monótona (creciente o decreciente) es uno a uno.

20. ¿Qué relación deben satisfacer los coeficientes a, b, c para que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ sea uno a uno?

21. Conteste Falso o Verdadero:

   (a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son crecientes, entonces $f \cdot g$ es creciente.

   (b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uno a uno, entonces $f \circ g$ es uno a uno.

   (c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son uno a uno, entonces $f \cdot g$ es uno a uno.

22. Una función $f(x)$ definida en todo $\mathbb{R}$ se dice que es una *función par* si $f(x) = f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Análogamente, se dice que es una *función impar* si $f(x) = -f(-x)$.

   (a) ¿Para qué valores del número natural n la función $f(x) = x^n$ es una función impar?

   (b) Pruebe que para cada función $f(x)$, la función $p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ es una función par.

   (c) Pruebe que toda función definida en $\mathbb{R}$ se puede escribir como suma de una función par y una función impar.

Problemas

23. Establezca una función $f : A \to B$ uno a uno y sobre para los conjuntos A y B siguientes.

   (a) $A = (0, 1)$ y $B = (0, \infty)$.

   (b) $A = (0, \infty)$ y $B = (-\infty, \infty)$.

   (c) $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$.

   (d) $A = (0, 1)$ y $B = [0, 1]$.

   (e) $A = (0, 1)$ y $B = (0, \infty)$.

24. Encuentre todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tienen la propiedad $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

3.4 Operaciones

Ejercicios

25. En cada caso, elija la respuesta correcta para la función involucrada.

    (a) $f \circ g = h$, para $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$.
        i. $f(x) = x^2 - x + 7$
        ii. $f(x) = x^2 + x + 6$
        iii. $f(x) = (x - 1)^2 + 7$.

    (b) $f \circ g = h$, para $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$.
        i. $g(x) = x^2 + x - 1$
        ii. $g(x) = x^2 + x + 6$
        iii. $g(x) = (x - 3)^2 + (x - 3) + 2$.

26. Sean las funciones reales de variable real $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$.

    (a) ¿Cuándo se tiene $f \circ g = g \circ f$?
    (b) ¿Cuándo $f \circ g = f$?
    (c) ¿Cuándo $f \circ g = g$?

27. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función racional $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + 3}$.

    (a) Encuentre los valores de x tales que $h(x) = 0$.
    (b) Encuentre la imagen de h.

Problemas

28. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función uno a uno y positiva y sea $f^{-1}(y)$ su función inversa. En cada uno de los casos planteados determine la inversa de la función g.

    (a) $g(x) = f(1/x)$.
    (b) $g(x) = [f(x)]^2$.
    (c) $g(x) = f(\sqrt{f(x) + 1})$.

29. Para cada función $f : A \to B$ y $C \subset B$, se define la imagen inversa de C bajo f como el subconjunto de A $f^{-1}(C) = \{x \in A \text{ tales que } f(x) \in C\}$. Pruebe que para cada par de subconjuntos C, E de B se tiene

    (a) $f^{-1}(C \cup E) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(E)$.
    (b) $f^{-1}(C \cap E) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(E)$.
    (c) $f^{-1}(B - C) = A - f^{-1}(C)$.

3.5 Funciones trigonométricas

30. Exprese en grados la medida de los ángulos que subtienden arcos en la circunferencia unitaria de longitud: (a) 20 radianes, (b) -12 radianes, (c) $\dfrac{\pi}{6}$ radianes, (d) 7π radianes.

31. A partir de las propiedades de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, deduzca las fórmulas trigonométricas siguientes.

    (a) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

    (b) $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$

    (c) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

32. Determine los intervalos en los cuales las funciones $\tan x, \sec x, \csc x$ y $\cot x$ tienen función inversa.

Problemas

33. Demuestre que $|a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ para cualesquiera $a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

34. De un pastel circular de radio R se corta un sector de ángulo central θ y se coloca en un plato de radio r. Exprese r como función del ángulo θ y dibuje su gráfica, suponiendo que r es el radio mínimo para que el plato contenga la rebanada de pastel.

3.6 Funciones trigonométricas inversas

Ejercicios

35. Deduzca las fórmulas trigonométricas siguientes:

    (a) $\cos(\operatorname{arcsen}(y)) = \pm\sqrt{1-y^2}$

    (b) $\operatorname{sen}(\arccos(y)) = \pm\sqrt{1-y^2}$

    (c) $\tan(\operatorname{arcsen}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

    (d) $\operatorname{arccsc}(\tan x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

36. Calcule los valores de las funciones siguientes:

    (a) $\tan\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$

(b) $\sec\big(\arctan 2\big)$.

Respuestas y sugerencias

1a. Sí

1b. El conjunto de todas personas.

1c. El conjunto de las mujeres que tienen hijos vivos.

1d. No

2a. $y = y(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

2b. $y = y(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{36}z^2$

2c. $w = w(y) = 3^{1/4}\sqrt{y}$

2d. $x = x(z) = \dfrac{1}{3}z$

2e. $x = x(y) = \dfrac{2}{3^{1/4}}\sqrt{y}$

3a. Cualquier conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$.

4. $A : \left[\dfrac{5}{2}, 5\right] \to \mathbb{R}, \quad A(\ell) = (5-\ell)\sqrt{101 - 25}$

5. $A : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad A(\theta) = 25\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}}$

6. $y : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, $y(m) = -m + 2$.

7. $A(V) = \sqrt[3]{36\pi V^2}$

8. $f : (-\infty, -2] \cup (2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(c) = -\dfrac{c}{2}$.

9a. $y = y(x) = 144 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 72 \operatorname{sen} x$

9b. $y = y(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$

10. $[-1, 1)$

11. $p : [0, \frac{1}{40}) \to \mathbb{R}$ con $p(t) = 10 \tan 20\pi t$.

16a. $g(x) = f(x) + 2$

16b. $g(x) = f(x + 3)$

16c. $g(x) = -f(x)$

16d. $g(x) = f(-x)$

20. $ab^2 + a = 0$

21a. Verdadero

21b. Verdadero

21c. Falso

24. $f(x) = ax$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

25a. $f(x) = h\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = x^2 - x + 7$

25b. $g(x) = x^2 + x - 1$

28a. $g^{-1}(y) = \dfrac{1}{f^{-1}(y)}$

28b. $g^{-1}(y) = f^{-1}(\sqrt{y})$

28c. $g^{-1}(y) = f^{-1}([f^{-1}(y)]^2 - 1)$

33. Sea α tal que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Entonces
$|a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta| = \sqrt{a^2 + b^2} |\operatorname{sen}(\alpha + \theta)| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

34. $$r(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta = 0 \\ \dfrac{1}{2} R \sec \dfrac{\theta}{2} & \text{si} \quad 0 < \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ R \cos \dfrac{\theta}{2} & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \\ R & \text{si} \quad \pi < \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

36a. $\tan\left(\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3}$

36b. $\sec(\arctan(2)) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Capítulo

4 Sucesiones y límites

4.1 Concepto de sucesión

1. Determine los primeros cinco elementos de cada una de las sucesiones siguientes.

   (a) $\left\{\dfrac{i+1}{i^2+2}\right\}_{i=1}^{\infty}$

   (b) $\left\{(-1)^i\right\}_{i=1}^{\infty}$

   (c) $\{\operatorname{sen}(\pi i)\}_{i=1}^{\infty}$

   (d) $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $a_i = 0$ si i es impar y $a_i = \left(\dfrac{i}{2}\right)^2$ si i es par.

2. Explique por qué la sucesión $\left\{\operatorname{sen}(i^2+2)\right\}_{i=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{\operatorname{sen} i\}_{i=1}^{\infty}$ y diga qué lugar ocupa en la sucesión el octavo elemento de la subsucesión.

3. Escriba los primeros tres elementos de la subsucesión de la sucesión $\left\{\operatorname{sen}(i^2+i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ generada por la elección creciente de etiquetas dada por la sucesión $\left\{i^3\right\}_{i=1}^{\infty}$. ¿Cuál es el octavo término de la subsucesión y qué lugar ocupa en la sucesión? ¿Cuál es el j-ésimo elemento de la subsucesión?

4. Escriba la definición de sucesión no convergente.

5. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $a_n = \sqrt{2}n - [\sqrt{2}n]$ (recuerde que, para cada número real x, el número $[x]$ es la parte entera de x, es decir, es el mayor entero menor o igual a x).

   (a) Muestre que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

   (b) Muestre que $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2} - 1$ ó $\sqrt{2} - 2$.

6. Considere la sucesión $\left\{\dfrac{2i+3}{i+5}\right\}_{i=1}^{\infty}$. Encuentre una etiqueta a partir de la cual sus elementos distan de $L=2$ en menos que 10^{-3}. Pruebe que $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 2$.

4.2 Convergencia de sucesiones

Ejercicios

7. Demuestre que toda subsucesión de una sucesión convergente $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente y tienen el mismo límite.

8. Dé un ejemplo de una sucesión no convergente que tenga subsucesiones convergentes y otro de una que no tenga subsucesiones convergentes.

9. Muestre que la sucesión $\left\{i^3\right\}_{i=1}^{\infty}$ es creciente.

10. Diga si la sucesión $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Si es así, encuentre una cota.

11. Sea $0 < t < \pi$ y considere la sucesión a_n definida de la siguiente forma: $a_n = nt - 2\pi k$, para n natural, donde $k \geqslant 0$ es el mayor entero tal que $nt - 2\pi k \geqslant 0$.

    (a) Si $t = \sqrt{2}$, calcule $a_3,\ a_{50}$ y a_{100}.

    (b) Demuestre que la sucesión $\{\operatorname{sen} a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente, pero tiene dos subsucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes.

12. Muestre que, para cada $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, las sucesiones $\{\operatorname{sen} nt\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ son divergentes.

13. Demuestre que las sucesiones $\left\{\left(\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ son divergentes.

14. Muestre que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n+3}{5n-6}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\dfrac{2}{5}$ y encuentre una etiqueta N tal que $\left|a_k - \dfrac{2}{5}\right| < 10^{-6}$ si $k > N$.

15. Diga si las siguientes sucesiones son convergentes y determine su límite.

    (a) $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

    (b) $\left\{\dfrac{2n^2+n-3}{n^2+8n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(d) $\left\{n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(f) $\left\{\dfrac{2n^4-7n}{n^2+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

16. (a) Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n+2} \operatorname{sen} n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero.

    (b) Encuentre una etiqueta N a partir de la cual los elementos de la sucesión pertenecen al intervalo $(-10^{-4}, 10^{4})$.

17. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesion de números reales. Conteste Falso o Verdadero, según sea el caso.

    (a) Si $a_n < 0$ para toda n y $a_n \to L$, entonces $L < 0$ (Sugerencia: considere la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ como un contrejemplo).

    (b) Si $a_n \geq 0$ para toda n y $a_n \to L$, entonces $L \geq 0$.

    (c) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces es convergente.

    (d) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada, entonces es convergente.

    (e) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\left\{\dfrac{1}{n}a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

    (f) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

18. Pruebe que si $a > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

19. Sea una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no acotada ni superior ni inferiormente y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Demuestre que todo número real es límite de una cierta subsucesión de la sucesión inicial. ¿Puede encontrar una sucesión con esas características?

20. Demuestre que si las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo límite, entonces la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$c_n = \begin{cases} a_{2k} & \text{si } n = 2k \\ b_{2k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

para $k = 1, 2, \ldots$, también converge al mismo límite.

21. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{n^2-1} & \text{si } \ n = 3k \ \text{ para algún } \ k \text{ natural} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{si } \ n = 3k+1 \text{ para algún } \ k \text{ natural} \\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} & \text{si } \ n = 3k+2 \text{ para algún } k \text{ natural.} \end{cases}$$

Diga si la sucesión es convergente y, en caso afirmativo, encuentre el límite.

22. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_1 = 1$ y $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) a_{n-1}$ para $n \geq 2$. Muestre que la sucesión es convergente.

23. (a) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^{200} + n^{100} + 1} - n^{100} = \dfrac{1}{2}$.

    (b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}^2(\sqrt{n^{200} + n^{100} + 1})$.

24. Encuentre el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$.

25. Argumente por qué la sucesión $\{\operatorname{sen} n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente.

26. Argumente, en cada caso, por qué el límite tiene el valor propuesto.

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 5 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \operatorname{sen} n^2}{n+1} = 0$

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Problemas

27. Demuestre que toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente tiene un término máximo o un término mínimo.

28. Sea $c > 0$ y considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente mediante

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[a_n + \frac{c}{a_n}\right].$$

Demuestre que la sucesión es decreciente y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$.

29. Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de *variación acotada* si la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $s_n =\mid a_2 - a_1 \mid + \mid a_3 - a_2 \mid + \cdots + \mid a_{n+1} - a_n \mid$, es acotada.

    (a) Demuestre que toda sucesión de variación acotada es convergente.

    (b) Demuestre que la afirmación recíproca también es válida; es decir, toda sucesión convergente es de variación acotada.

30. Demuestre que toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada posee una subsucesión no creciente o una no decreciente.

31. Para cada sucesión real $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, considere su sucesión de promedios $s_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = L$.

32. (a) Dé un ejemplo de una sucesión divergente tal que $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ para cada n.

    (b) Demuestre que si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$, entonces es convergente.

33. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ y $\lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \infty$, donde $b_n \geqslant 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots b_n} = g$.

34. Demuestre que si una sucesión de números racionales $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número irracional, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

35. Muestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5} = \dfrac{1}{5}$.

36. Determine los límites siguientes:

    (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$

    (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$

    (c) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$

    (d) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n-1}{n!}\right)$

    (e) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$.

37. Analice la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, donde

$$x_1 = \sqrt{a},\ x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \cdots\ x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ raíces}}, \quad \text{con } a > 0.$$

4.3 Límite de funciones

38. Calcule los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3+3x+1}{3x^3+2x+5}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$.

39. De las funciones siguientes, ¿cuál no tiene límite cuando $x \to 2$?

(a) $f(x) = \ln(1/x)$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$.

40. Determinar

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{|x+1|-1}{4-x^2}$

41. Determinar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, donde

(a) $f(x) = \dfrac{100x^2+1}{x^2+100}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

4.4 Límites y continuidad

Ejercicios

42. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

   (a) ¿Está f definida en $x = a$?
   (b) ¿Existe $\lim_{x \to a} f(x)$?
   (c) ¿Es f continua en $x = a$? ¿Por qué?

43. Sea f la función

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leqslant 1 \\ bx^2 + x + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   ¿Para qué valores de a, b la función es continua en $x = 1$?

44. Sea f la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   (a) ¿Es f continua en $x = 0$? (Justifique su respuesta).
   (b) ¿Es f continua en $x = 1$? (Justifique su respuesta).

45. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

   (a) $f(n) = nf(1)$
   (b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} f(1)$
   (c) $f(x) = -f(-x)$
   (d) $f(x) = xf(1)$ para todo x real.

46. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Pruebe que existe $a > 0$ tal que $f(x) \geqslant a$ para toda $x \in [a, b]$.

47. (a) Demuestre que la suma y la composición de funciones lipschitzianas es lipschitziana.
   (b) Demuestre que si f y g son funciones acotadas y lipschitzianas en $A \subset \mathbb{R}$, entonces su producto es una función lipschitziana.

(c) Demuestre que cada función lipschitziana es continua en todos los puntos de su dominio.

48. Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión real con $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = L$. Pruebe que la sucesión $\{|a_i|\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $|L|$.

49. Pruebe que si la función $f(x)$ es continua en $x = x_0$, también será continua en ese punto la función $|f(x)|$.

50. Calcule los límites siguientes, si existen, y si no es el caso, diga por qué.

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x)$

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$

    (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

    (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

51. En cada caso, conteste Falso o Verdadero

    (a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces

        i. f está definida en $x = a$

        ii. $f(a) = L$

        iii. f es continua en $x = a$

    (b) Si f es continua en un intervalo J, entonces

        i. $f^2(x)$ es continua en J

        ii. $f(x+2)$ es continua en J

    (c) Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua en (a, b), entonces

        i. f es no acotada

        ii. f es acotada pero no alcanza en (a,b) su valor máximo

52. Aplicando la propiedad del valor intermedio para funciones continuas, demuestre que la ecuación $x^3 + x^2 - x - 4 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[1, 2]$.

53. Pruebe que una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona si y sólo si es uno a uno.

54. Sea $f(x)$ una función continua en $[0, 1]$ tal que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para toda $x \in [0, 1]$. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugerencia: aplique la propiedad del valor intermedio a la función $g(x) = f(x) - x$.)

Problemas

55. Explique por qué el límite de una sucesión convergente de números reales positivos es no-negativo.

56. Pruebe que si una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene inversa, ésta es continua.

57. Sea $f(x)$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ primos relativos.} \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en los puntos irracionales y discontinua en los racionales.

58. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces la función $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es continua.

Respuestas y sugerencias

10. Use el resultado del problema 8f del capítulo 2.

11a. $a_3 = 3\sqrt{2}$, $a_{50} = 50\sqrt{2} - 22\pi \approx 1$, $a_{100} = 100\sqrt{2} - (2\pi)22 \approx 3$.

11b. Si $t < \pi$, los elementos de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se distribuyen a lo largo del intervalo $[0, 2\pi]$ por bloques sucesivos de etiquetas de tal manera que se pueden extraer subsucesiones $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuyos elementos son tales que $b_n \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ y $c_n \in \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$. Al considerar las subsucesiones correspondientes $\{\operatorname{sen} b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\operatorname{sen} c_n\}_{n=1}^{\infty}$, se ve que toman valores positivos y negativos, respectivamente, y por lo tanto, en general, no podrán converger a un límite común. Esto muestra que la sucesión $\{\operatorname{sen} a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente.

12. Supongamos que $t > 0$. Sea k entero, $k \geqslant 0$ y $\dfrac{p}{q}$ con p, q primos relativos tales que $\left|\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}\left(2\pi k + \dfrac{2\pi p}{q}\right)\right| < \dfrac{1}{3}$.

13. Para la sucesión $\left\{\left(\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ basta observar que las etiquetas de la forma $3k$ con k natural definen una subsucesión cuyos términos tienen el valor 1, mientras que las etiquetas de la forma $3k + 1$ dan lugar a la subsucesión

$\left\{\left(\cos\dfrac{2\pi(3k+1)}{3}\right)^{3k+1}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)^{3k+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, la cual converge a cero; luego, la sucesión no puede converger.

Para la sucesión $\left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, las etiquetas de la forma $n=2k$ dan lugar a la subsucesión $\left\{\sqrt[2k]{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, la cual converge a 1, mientras que para etiquetas de la forma $n=2k+1$ se tiene $\left\{(-1)^{\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}}(2k+1)^{1/(2k+1)}\right\} = \left\{-(2k+1)^{1/(2k+1)}\right\}$, que converge a -1; luego, la sucesión dada no puede ser convergente.

22. La sucesión es decreciente ya que $a_n - a_{n-1} = -\dfrac{1}{n^2}a_{n-1}$ para $n \geq 2$ y, además, acotada inferiormente pues $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)a_{n-1} > 0$ para toda $n \geq 2$; luego, es convergente.

24. Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, entonces se tendrá que $L=\sqrt{c+L}$ y, por tanto, $L^2-L-c=0$ y $L = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

25. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen} n = a$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}(n+2) = a$, de tal forma que $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(n+2)-\operatorname{sen} n) = 0$, pero $\operatorname{sen}(n+2)-\operatorname{sen} n = 2\operatorname{sen}1\cos(n+1)$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1) = 0$. Por su parte, $\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \operatorname{sen} n\operatorname{sen} 1$, lo cual implica que $\operatorname{sen} n = \dfrac{1}{\operatorname{sen}1}(\cos n\cos 1 - \cos(n+1))$ y, por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen} n = 0$. Además, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen} n = 0$, lo cual es una contradicción, ya que $\cos^2 n + \operatorname{sen}^2 n = 1$. Por lo tanto, la sucesión $\{\operatorname{sen} n\}$ no es convergente.

27. Si la sucesión es constante, la solución al problema es obvia. Si la sucesión no es constante, por ser convergente es acotada y, por lo tanto, su supremum es distinto de su infimum y al menos uno de ellos será un elemento de la sucesión, pues de otra manera existirían subsucesiones de la sucesión inicial, convergentes a esos valores. Como toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente al mismo límite, se tendría que el supremum y el maximum coincidirían, lo cual no es el caso pues estamos considerando que la sucesión inicial no es constante.

32a. Considere la sucesión $a_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{2i}$. Esta sucesión es divergente y además $\mid a_{n+1} - a_n \mid < \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$.

32b. Probaremos que, en este caso, la sucesión satisface la propiedad de Cauchy. Para cualquier par de etiquetas n y $n+k$ se tiene que

$$\begin{aligned}|a_{n+k}-a_n| &\leqslant |a_{n+k}-a_{n+k-1}|+|a_{n+k+1}-a_{n+k-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n| \\ &< \frac{1}{2^{n+k-1}}+\frac{1}{2^{n+k-2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Luego, la sucesión satisface la propiedad de Cauchy y, por lo tanto, es convergente.

35. Pongamos $S_n = 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ y supongamos que también es posible expresar esta cantidad en la forma $S_n = An^5+Bn^4+Cn^3+Dn^2+En+F$. Entonces,

$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n = \; & A[(n+1)^5-n^5]+B[(n+1)^4-n^4]+C[(n+1)^3-n^3]+ \\ & +C[(n+1)^2-n^2]+E[(n+1)-n].\end{aligned}$$

Ahora, desarrollando cada término del lado derecho con la fórmula del binomio de Newton e igualando las expresiones correspondientes para S_n, tenemos

$$\begin{aligned}(n+1)^4 = \; & 5An^4+(10A+4B)n^3+(10A+6B+3C)n^2+ \\ & +(5A+4B+3C+2D)n+A+B+C+D+E.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes de potencias iguales de n se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}&5A &&=1\\ &10A+4B &&=4\\ &10A+6B+3C &&=6\\ &5A+4B+3C+2D &&=4\\ &A+B+C+D+E &&=1,\end{aligned}$$

cuya solución es $A=1/5, B=1/2, C=1/3, D=0, E=-1/30$. Así, $S_n = \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n+F$. Para $n=1$, se obtiene $1=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}+F$, de donde $F=0$. Por lo tanto,

$$S_n = 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30},$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{30n^4}\right)=\frac{1}{5}.$$

36a. 1/2 36b. 1/6 36c. 1 36d. 1 36e. 1/4

37. Converge a $(1+\sqrt{1+4a})/2$.

40a. 1/4 40b. -1/4

41a. 100 41b. 1

58. Si x_0 es tal que $f(x_0) - g(x_0) > 0$, por ser ambas continuas, se tiene que existe un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tal que $f(x) - g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Por lo tanto la función $h(x)$ coincide con la función $f(x)$ en ese intervalo y por lo tanto también será continua en x_0. Por otro lado, si $f(x_0) - g(x_0) = 0$ y $x_n \to x_0$, se tendrá que $h(x_n) = \max\{f(x_n), g(x_n)\}$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) - g(x_n) = 0$, se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = \max\{f(x_0), g(x_0)\} = h(x_0)$.

Capítulo

5 La derivada

5.1 El concepto de derivada

Ejercicios

1. Calcule los límites siguientes:

   (a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{97} - 2^{97}}{h}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen} 8}{x-2}$

   (c) $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{\dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}}$.

2. Aplicando la definición de derivada en un punto, calcule la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en los puntos x_0 dados y escriba detalladamente la respuesta obtenida.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases} \qquad x_0 = 1,\ x_0 = 0.$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \leqslant 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1.$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

3. Demuestre que la función $f(x)$ del inciso 2c tiene derivada en todo punto, pero que ésta es discontinua en $x = 0$.

4. Suponiendo que $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$, determine el límite en los casos siguientes:

   (a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})} \left[\dfrac{f(x)}{f(a)} - 1 \right], \qquad a > 0.$

(b) $\lim_{x\to a} \dfrac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}, \qquad n \in \mathbb{N}.$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left[f(a+1/n^2) + f(a+2/n^2) + \cdots + f(a+n/n^2) - nf(a) \right].$

5.2 Cálculo de derivadas. Reglas de derivación

Ejercicios

5. Aplicando las reglas de derivación, calcule la derivada de las funciones siguientes en el punto x_0 dado.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x), \qquad x_0 = \pi/2.$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}, \qquad x_0 = 1.$

   (c) $f(x) = \sqrt{\tan^2 x^2 + x}, \quad x_0 = \sqrt{\pi/4}.$

   (d) $f(x) = \tan(\cos(x^2+1)), \qquad x_0 = 0.$

   (e) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}, \qquad x_0 = 1/2.$

6. (a) Calcule la función derivada de $y(x) = x|x|$ y grafíquela en el intervalo $[-1, 1]$.

   (b) Describa en qué puntos la función $f(x) = |x^2 - 1|$ tiene derivada.

   (c) Calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(g(x) + 2)$ en el punto $x = 3$, si $g(3) = (\pi - 12)/6$ y $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(3) = -4$.

7. Sean $y = f(x)$ y $z = g(x)$ funciones derivables en cada punto de $\mathbb{R}$ tales que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2) = 3$, $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(2) = -3$, $f(2) = 1$ y $g(2) = 2$. Calcule

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x}(2)$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}(f \cdot g)}{\mathrm{d}x}(2)$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}\,(f/g)}{\mathrm{d}x}(2).$

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(0) = 1$ y tal que, para cualesquiera $x, h \in \mathbb{R}$, satisface $f(x+h) - f(x) = 8xh - 2h + 4h^2$. Calcule

   (a) $f(2)$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2)$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(2).$

9. Sea $f(x)$ una función derivable en toda la recta real. Establezca la fórmula para la derivada de la función $g(x) = f(xf(x))$.

10. Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(\cos x))$ en el punto $x = \operatorname{arcsen}(1/2)$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(3) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3) = \dfrac{\pi}{4}$.

    (a) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} f(x))(3)$.

    (b) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{f(x)^2 + x})(3)$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(3) = 3$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3) = 2$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3}) = 1$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(9) = 1$.

    (a) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(f(x)) - f(x^2)\right](3)$.

    (b) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{f(f(x))} - f(\sqrt{f(x)})\right](3)$.

13. Sea $h(x) = (f \circ g)(x)$ donde f y g son funciones derivables. Determine la fórmula para $\dfrac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$.

14. Sea $g(x) = x^3 + x$. Calcule la derivada de la función inversa de $g(x)$ en $x = 2$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, tal que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. En cada uno de los casos siguientes, exprese la derivada de la función g en el punto $x = x_0$ y en términos de la derivadas de f.

    (a) $g(x) = f^2(x) - f(x^2)$

    (b) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$

    (c) $g(x) = \operatorname{sen} f^{-1}(x)$.

16. Si $f(0) = 1$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 2$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 3$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(0) = -1$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(1) = -5$. Calcule la segunda derivada de la función $g(x) = (f \circ f)(x)$ en $x = 0$.

17. Determine la derivada $y'(x)$ de las funciones siguientes:

    (a) $y(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

    (b) $y(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

    (c) $y(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x) + \cos^2(\operatorname{sen} x)$

(d) $y(x) = f(x^2) - f\left(x^{-2}\right)$.

18. Demostrar (por inducción) que, si $f_1(x), f_2(x), \cdots f_n(x)$ son funciones diferenciables en el punto x, también la suma $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ y el producto $\prod_{i=1}^{n} f_i(x)$ son diferenciables en x y

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}(x)$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdot \ldots \cdot \dfrac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$.

Problemas

19. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces $g(x) = (x-3)^2 f(x)$ tiene derivada en $x_0 = 3$.

20. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $f(x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^2)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Dado que $f(1) = 1$ y $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(1) = 8$, determine el valor de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) + \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(1)$.

21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Además, $f(3) = 3$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3) = 2$. Sea $f^{-1}(y)$ su función inversa.

(a) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f^{-1} \circ f^{-1}\right](3)$.

(b) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\sqrt{f^{-1}(y)}\right](3)$.

22. Sea $f(x) = \cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos x)))))))$ y sea a tal que $a = \cos a$. Exprese $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ como polinomio en a.

5.3 Interpretación física y geométrica. Aplicaciones

Ejercicios

23. Calcule la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto $(1, 3)$.

(a) Diga en qué punto se intersectan la recta $y = 0$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x$ que tiene pendiente $m = 1/2$.

(b) ¿En qué punto la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ tiene pendiente igual a cero?

24. (a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

    (b) Sobre la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, encuentre los puntos en los que la recta tangente tiene una inclinación de $\pi/4$ radianes.

25. ¿Con qué ángulo se intersectan la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la parábola $y = x^2$? Es decir, ¿qué ángulo forman las rectas tangentes correspondientes en el punto de intersección de las curvas?

26. Calcule la variación de la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ con respecto a la variación de la abscisa del punto de tangencia en el punto $(2, 4)$.

27. Sea $f(x)$ una función derivable para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre los enunciados siguientes:

    (a) Si $f(x)$ es una función par, entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ es una función impar.

    (b) Si $f(x)$ es una función impar, entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ es una función par.

28. Si el ángulo que forman los lados iguales de un triángulo isósceles de altura constante e igual a 10 crece a razón de $\pi/64$ radianes por segundo, ¿cómo varía el área del triángulo en el momento t_0 en que el área del triángulo es 1?

29. Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3$ en los que su recta tangente es perpendicular a la recta tangente a la curva $y = x^2 + 4$ en el punto $(-1, 5)$.

30. Considere un cono recto invertido de radio 4 m y altura 10 m en el que se vierte agua a razón de 2 cm^3/seg. Calcule la velocidad con que aumenta el nivel del agua cuando se ha llenado la mitad del recipiente.

31. Considere la curva en el plano $y = x^2 + x + 2$ para $x > 0$ y denótese por P a un punto de la curva. Calcule la razón de cambio del ángulo θ que forma la tangente a la curva en el punto P con el eje de las abscisas con respecto al valor de la abscisa del punto de tangencia.

32. Sea $f(x) = x^3 + ax + b$ con $a \neq b$ y suponga que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $x = a$ y $x = b$ son paralelas. Calcule $f(1)$.

33. Considere la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que contiene al punto $(6, 0)$.

34. El cono circular recto generado al rotar la recta $y = x$ alrededor del eje de las ordenadas se llena con agua a razón de 2 cm/seg. Calcule la velocidad con que aumenta el nivel del líquido en el cono, medido sobre la pared del cono, cuando se han vertido 100 cm^3 de agua.

35. Una esfera elástica se infla con aire a razón de 2 m^3/min. Describa con qué velocidad aumenta el área de la esfera si en $t = 0$ su volumen era igual a 50 m^3. ¿En cuánto tiempo el área de la esfera será igual al doble de su área inicial?

36. Considere la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Encuentre la recta tangente a la elipse que pasa por el punto $(6, 8)$.

37. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$ un punto donde f tiene derivada y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) > 0$. Pruebe que existe un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ donde f es creciente con respecto a su valor en x_0, es decir, $f(x_0 + h) < f(x_0 + k)$ para cada $x_0 + h < x_0 + k$ con $0 > h > -\varepsilon$ y $0 < k < \varepsilon$.

38. Pruebe que si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable y para $c < d$, puntos de (a, b), se tiene $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) < 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(d) > 0$, entonces existe $x_0 \in (c, d)$ donde $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.

39. Bajo las hipótesis del problema 38, demuestre que, en general, si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) < y_0 < \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(d)$, existe $x_0 \in (c, d)$ donde $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = y_0$. Lo anterior muestra que la función derivada tiene siempre la propiedad del valor intermedio. A este resultado se le conoce como *teorema de Darboux.*

Problemas

40. ¿Cuántos cm^3 por segundo crece el volumen de un cilindro cuando su área lateral es de 100 cm^2 y crece 1 cm^2 por segundo y su altura es de 15 cm y decrece 3 cm por segundo?

41. Considere un cilindro de radio r y altura h. Si en un tiempo t_0 el área lateral del cilindro varía a razón de 2 cm/seg, describa cómo debe variar el radio con respecto al tiempo para que el volumen del cilindro permanezca constante.

42. Considere la familia de parábolas $y = a(t)x^2 + c(t)$ con coeficientes que dependen del tiempo. Si el coeficiente $a(t)$ crece a razón de 2cm/seg y el coeficiente $c(t)$ decrece a razón de 1 cm/seg, ¿con qué velocidad se desplaza el punto en el que las parábolas cortan al eje de las abscisas cuando $a = 1$ y $c = -2$?

Respuestas y sugerencias

1a. $97 \cdot 2^{96}$

1b. $12 \cos 8$

1c. $\sqrt{6}$

2a. En el punto $x_0 = 1$ no existe la derivada, mientras que en $x_0 = 0$ se tiene $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 0$.

2b. En tal punto no existe la derivada.

2c. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 0$

3. La derivada en $x \neq 0$, tiene la forma

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

mientras que en $x = 0$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0.$$

La derivada no es continua pues tomando la sucesión convergente a cero $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n) = -1 \neq \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0).$$

5a. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

5b. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$

5c. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{4\sqrt{\frac{\pi}{4}} + 1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\pi}{4}}}}$.

5d. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 0$.

5e. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

6a. La función derivada tiene la forma $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 2|x|, \quad x \in \mathbb{R}$.

6b. La función derivada de f tiene la forma

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = \pm 1 \\ 2x & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

6c. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3) = \cos(g(3)+2)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(3) = -4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}.$

8a. $f(2) = f(0+2) - f(0) = -12.$

8b. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 14.$

8c. En general, se tiene $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 8x - 2$, por lo tanto $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(2) = 8.$

9. Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(xf(x))\left[f(x) + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right].$$

10. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\sqrt{\frac{3}{4}}\right)\cos\sqrt{\frac{3}{4}}$

11a. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} f(x))(3) = \frac{\pi}{4}$

11b. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{f(x)^2 + x}(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

12a. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(f(x)) - f(x^2))(3) = 3$

12b. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sqrt{f(f(x))} - f(\sqrt{f(x)})\big)(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15a. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = 2f(x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) - 2x_0\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$

15b. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(f(f(x_0)))\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(f(x_0))\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$

15c. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = \cos(f^{-1}(x_0))\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(f^{-1}(x_0))\right]^{-1}$

16. $\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(0) = -23$

19. $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(3) = 0$

21a. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = \dfrac{1}{4}$

21b. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(\sqrt{f^{-1}(y)}\big)(3) = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

24a. $y = 2x - 1$

24b. $P_1 = \left(-\dfrac{9y}{16}\sqrt{\dfrac{13}{4}}, \sqrt{\dfrac{13}{4}}\right), \quad P_2 = \left(\dfrac{9y}{16}\sqrt{\dfrac{13}{4}}, -\sqrt{\dfrac{13}{4}}\right).$

26. La pendiente m, como función de la abscisa del punto de tangencia, es precisamente la derivada $m(x) = 2x$ y, por lo tanto, la variación de esa función será

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}(2) = 2.$$

Note que, de hecho, $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}(x) = 2$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

28. Si denotamos por $\theta(t)$ el ángulo como función del tiempo y $A(t)$ el área del triángulo, se tiene la relación

$$A(t) = 10^2 \tan \frac{\theta(t)}{2}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) = 50 \sec^2 \theta(t) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t),$$

de donde se tiene

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{50\pi}{64} \sec^2 \left(2 \arctan \frac{1}{10^2}\right).$$

29. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 4$ por el punto $(1, -5)$ es $m = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(-1) = -2$. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en un punto arbitrario (x, x^3) de su gráfica es igual a $3x^2$, y será perpendicular a la recta de pendiente $m = -2$ en aquél punto tal que $3x^2 = \dfrac{1}{2}$; es decir, será la recta tangente por los puntos $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{6\sqrt{6}}\right)$.

30. El volumen $V(t)$ de agua en el tiempo t es igual a $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi r^2(t)h(t)$. Por otro lado, de las dimensiones de cono se tiene $\dfrac{10}{4} = \dfrac{h(t)}{r(t)}$. Entonces

$$V(t) = \frac{16}{300}\pi h^3(t).$$

Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{4}{75}\pi h^2(t)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t).$$

Si denotamos con t_m el instante en el que se ha llenado la mitad del recipiente, es decir, cuando el volumen de agua en el cono es la mitad de su volumen total, tenemos que

$$\frac{4}{75}\pi h(t_m) = \frac{1}{2}\frac{4}{75}\pi(10)^3,$$

de donde $h(t_m) = \dfrac{10}{\sqrt[3]{2}}$ m. En el instante t_m se tendrá entonces que

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t_m) = \frac{4}{75}\pi h^2(t_m)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t_m).$$

Pero $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = k = 2\dfrac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{seg}} = 2\times 10^{-6}\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{seg}}$, de manera que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t_m) = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot k}{16\pi} = \frac{\sqrt[3]{4}\times 10^{-6}}{8\pi}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{seg}}.$$

31. El ángulo $\theta(x)$, como función de la abscisa del punto de tangencia, es

$$\tan\theta(x) = 2x+1.$$

Tomando derivadas:

$$\sec^2\theta(x)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}(x) = 2.$$

Entonces, la variación del ángulo como función de la abscisa del punto de tangencia es

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}(x) &= 2\cos^2(\arctan(2x+1))\\ &= \frac{1}{2x^2+2x+1}.\end{aligned}$$

32. $f(1) = 1$

37. Por hipótesis, se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

y entonces, si $h<0$ y es cercano a 0, se tiene $f(x_0+h) < f(x_0)$, y si $h>0$ y es cercano a 0, se tiene $f(x_0+h) > f(x_0)$. Luego, en un intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ alrededor de 0 se tiene que

$$f(x_0+h) < f(x_0+k)$$

para cada $x_0+h < x_0+k$ con $0>h>-\varepsilon$ y $0<k<\varepsilon$.

38. Aplicando el resultado del problema 37, podemos afirmar que existen intervalos $[c, c+\varepsilon)$ y $(d-\varepsilon, d]$ tales que f

$$f(c+h) < f(c) \text{ si } h < \varepsilon$$

y

$$f(d-k) < f(d) \text{ si } 0 > k > -\varepsilon.$$

Como f es continua en $[c, d]$, debe alcanzar su valor mínimo en ese intervalo. Por otro lado, ni $f(c)$ ni $f(d)$ pueden ser ese valor mínimo y, por lo tanto, deberá existir un punto $x_0 \in (c, d)$ tal que

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \text{para} \quad x \in (c, d).$$

Como f es derivable, se tendrá

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0.$$

40. Las fórmulas $V(t) = \pi r(t)^2 h(t)$ y $A(t) = 2\pi r(t)h(t)$ describen volumen y el área, respectivamente, de un cilindro. El volumen, en términos de la altura $h(t)$ y el área $A(t)$, está dado por

$$V(t) = \frac{A^2(t)}{4\pi h(t)}.$$

Calculando la derivada en $t = 0$, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{2A(0)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(0)}{4\pi h(0)} - \frac{A^2(0)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(0)}{4\pi h^2(0)} = \frac{530}{9\pi}.$$

42. El punto de corte $P(t)$ sobre el eje de las abscisas correspondiente a la parábola parametrizada con la variable t es de la forma

$$P(t) = \left(\sqrt{\frac{-c(t)}{a(t)}}, 0\right).$$

Luego, la velocidad v con que $P(t)$ se desplaza el punto a lo largo del eje de las abscisas es igual a $v(t) = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Capítulo

6

Teorema del valor medio y sus aplicaciones

El teorema del valor medio es un resultado fundamental en el estudio del comportamiento de las funciones derivables. Este teorema permite estimar la variación de la función respecto a la variación de su variable independiente y da lugar a los principales criterios para la clasificación de los puntos del dominio de la función y su aproximación polinomial. Aquí se proponen distintos tipos de ejercicios y problemas de aplicación del teorema del valor medio tanto a cuestiones del análisis matemático como a problemas en otras áreas.

6.1 Desigualdades y estimaciones

Ejercicios

1. El teorema del valor medio establece que si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(b - a).$$

Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $[1, 7]$, encuentre el valor de c que asegura el T. V. M.

2. Aplicando el teorema del valor medio, establezca la estimación

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|.$$

Problemas

3. Pruebe, utilizando el teorema del valor medio, que toda función con derivada continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es lipschitziana. Recuerde que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es acotada.

4. Sean f y g dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b). Pruebe que si $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right| < \left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right|$ para cada $x \in (a,b)$, entonces

$$|f(b) - f(a)| < |g(b) - g(a)|.$$

5. Aplicando el teorema del valor medio, pruebe las desigualdades siguientes.

   (a) $\sqrt[m]{1+a} < 1 + \frac{a}{m}$ para $a \geqslant -1$, m un número entero positivo.

   (b) $\left|\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b}\right| \leqslant |a-b|$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

6. (a) Aplicando el teorema del valor medio, pruebe que $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ para cualesquiera a, b con $0 < a < b$ y, haciendo uso de esto, deduzca las desigualdades

$$n^m > m^n \quad \text{si } m > n \geqslant \mathrm{e} \quad \text{y}$$
$$n^m < m^n \quad \text{si } \mathrm{e} \geqslant m \geqslant n.$$

   (b) Tomando $a = 1$ en 6a, deduzca la desigualdad $\frac{b-1}{b} < \ln b < b-1$ y pruebe que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

7. Aplicando el teorema del valor medio, pruebe que si $\alpha = \frac{p}{q} < 1$, entonces

$$(x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha$$

   para x, y positivas.

8. Considere la familia de polinomios definidos por

$$g_n(x) = x^n + x - 1.$$

   (a) Pruebe que para cada $n \geqslant 2$, el polinomio tiene una única raíz positiva r_n.

   (b) Muestre que la sucesión r_n de raíces positivas es creciente y acotada.

   (c) Muestre que la sucesión r_n de raíces positivas es convergente y encuentre el límite.

6.2 Comportamiento de funciones derivables

Ejercicios

9. Si la gráfica de la función velocidad de un automóvil se ve cualitativamente como en la figura 6.1, dibuje la gráfica de la posición del auto con respecto al tiempo si ésta era, en el tiempo $t = 1$, de 100 metros medidos a partir del inicio de la carretera. Describa el movimiento del auto.

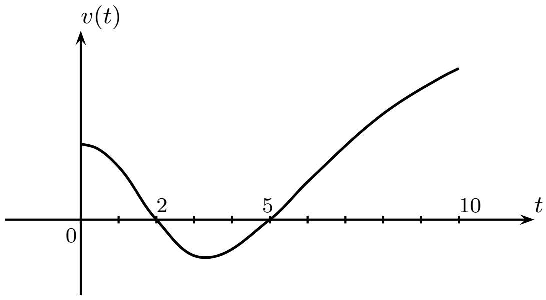


Figura 6.1 Gráfica de la función velocidad para el problema 9

10. Sean f y g dos funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y tales que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = g(x)$ y $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Suponiendo además que $f(0) = 2$ y $g(0) = 0$, demuestre que
$$f^2(x) - g^2(x) = 4 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

11. Si $f(x) = |x-1| + |x+2|$, encuentre los intervalos de monotonía de f y presente su gráfica.

12. Encuentre la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$ y
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = |2x - 3|.$$

13. Encuentre dónde son crecientes o decrecientes las funciones siguientes y calcule sus máximos y mínimos locales.

   (a) $f(x) = 8x^9 - 9x^8$
   (b) $f(x) = 7x^9 - 18x^7$
   (c) $f(x) = 5x^6 + 6x^5 - 15x^4$.

14. Trace la gráfica de una función continua $f : [-1, 5] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) < 0 \quad \text{para toda} \quad x \in (-1, 5),$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(4) \text{ no existe,}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0 \quad \text{si} \quad x \in (-1, 4) \quad \text{y}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in (4, 5).$$

15. Sea f una función con derivada de orden 3, continua, y supongamos que para un número c se tiene

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(c) > 0.$$

Diga si el punto $x = c$ es punto máximo, mínimo o punto de inflexión. Explique sus razones.

16. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[-3, 3]$ y tal que su primera y segunda funciones derivadas tienen las siguientes características:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) : \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-3, -1) \\ = 0 & \text{si } x = -1 \\ < 0 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ = 0 & \text{si } x = 1 \\ < 0 & \text{si } x \in (1, 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) : \begin{cases} < 0 & \text{si } x \in (-3, 0) \\ = 0 & \text{si } x = 0 \\ > 0 & \text{si } x \in (0, 1) \\ = 0 & \text{si } x = 1 \\ < 0 & \text{si } x \in (1, 3) \end{cases}$$

(a) ¿En qué puntos de $[-3, 3]$ tiene $f(x)$ máximos o mínimos locales?

(b) ¿Qué puntos de $[-3, 3]$ son puntos de inflexión?

(c) Si $f(0) = 0$, dibuje la gráfica de $f(x)$ señalando sus intervalos de monotonía, sus concavidades, etc.

17. Encuentre la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = |x|$, y diga si el punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

18. Para cada uno de los casos siguientes, diga si existe una función dos veces derivable que satisfaga las propiedades enunciadas. Justifique sus respuestas.

(a) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$ y $f(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) < 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$ y $f(x) < 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

19. Determine los intervalos de monotonía, los puntos regulares, clasifique los puntos críticos y encuentre los puntos de inflexión de las funciones:

    (a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 + x + 2$
    (b) $f(x) = 7x^9 - 18x^7$.

Problemas

20. Considere la familia de polinomios de la forma $p(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$ con c una constante real. Conteste las preguntas siguientes:

    (a) ¿Para qué valores de c el polinomio tiene máximos locales?
    (b) ¿Para qué valores c el polinomio tiene mínimos locales?
    (c) ¿Para qué valores de c el polinomio tiene puntos de inflexión?

21. Si $f(x)$ es una función con derivadas continuas de orden cuatro, diga cuáles de los enunciados siguientes son siempre verdaderos y cuáles son a veces falsos, dando en este último caso un ejemplo para probarlo.

    (a) Si f es no decreciente en (a, b), entonces $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \geqslant 0$ para toda $x \in (a, b)$.
    (b) Si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f no tiene máximos ni mánimos en (a, b).
    (c) Si f tiene dos máximos locales en (a, b), entonces tiene un mínimo local en (a, b).
    (d) Si $x_0 \in (a, b)$ es un punto de inflexión de f, entonces $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.
    (e) Si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ es creciente en (a, b), entonces f no tiene puntos de inflexión en (a, b).
    (f) Si $x_0 \in [a, b]$ es mínimo absoluto de f en $[a, b]$, entonces $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.
    (g) Si $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x} > 0$ en (a, b) entonces f es una función monótona en (a, b).
    (h) Si $\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} = 0$ en $\mathbb{R}$, entonces f no es acotada en $\mathbb{R}$.

22. Un punto c se dice *punto fijo de una función* f si $f(c) = c$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \neq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Dé ejemplos de funciones con esas propiedades que tengan punto fijo y dé funciones que no lo tengan. Pruebe que si f tiene punto fijo, éste es único.

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable para la que existe $c > 0$ tal que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \geqslant c$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe un único punto x_0 tal que $f(x_0) = k$.

6.3 Teorema de Taylor y reglas de L'Hospital

Ejercicios

24. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios de grado 2 tales que

$$P(1) = Q(1), \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(1), \quad \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}(1) = \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}(1).$$

Pruebe que los dos polinomios son iguales.

25. Demuestre que si $|x| < \frac{1}{2}$, entonces la fórmula aproximada

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

da el valor de $\sqrt{1+x}$ con un error menor que $\frac{3}{16}|x|^3$.

26. Aplicando el teorema de Taylor, calcule $\sqrt[3]{1.5}$ con tres cifras decimales.

27. Aplicando las reglas de L'Hopital, evalúe los límites siguientes:

   (a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x - \pi}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x - \tan x}$

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\arctan x}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{3 \tan x - \tan 3x}$.

Problemas

28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Sea a un punto dado y la función

$$F(x) = f(a) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)(x-a) - f(x).$$

Muestre que $F(x) > 0$ para toda $x \neq a$.

29. Aplicando la regla de L'Hospital, demuestre que:

   (a) si f tiene derivada continua en x entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

(b) si f tiene segunda derivada continua en x, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x).$$

30. Sea f una función continua en $[a, b]$ con segunda derivada en (a, b) tal que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$, entonces

$$f(\alpha a + \beta b) > \alpha f(a) + \beta f(b).$$

6.4 Cálculo y aplicaciones de máximos y mínimos

Ejercicios

31. (a) ¿En qué puntos de la curva $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ la pendiente de la recta tangente alcanza el valor máximo?

    (b) Para la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ definida en $[-2, 2]$, determine los puntos en los que f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos, respectivamente.

32. De las ventanas con perímetro 10 m y cuya forma es la unión de un rectángulo y un semicírculo cuyo diámetro coincide con el lado superior del rectángulo, encuentre aquélla que deja pasar la mayor cantidad de luz.

33. Encuentre las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que pueda contener a la esfera de radio 4.

34. Encuentre las dimensiones del cilindro de área mínima (incluyendo las tapaderas) con volumen de 1 litro.

35. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área y perímetro 4 metros.

36. Encuentre el número real x positivo tal que la suma de ese número y el recíproco de su cuadrado tiene el valor mínimo.

37. Encuentre la distancia más corta del punto $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ a la curva $y = \frac{1}{8}x^4$.

38. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede dibujarse dentro del triángulo rectángulo de lados 3-4-5 y tal que uno de sus lados descansa sobre la hipotenusa.

39. Una pieza cuadrada de cartón de 3 m^2 es usada para construir una caja rectangular abierta por arriba, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando hacia arriba a lo largo de las aristas definidas por los cortes. Encuentre las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir.

40. Un barco A está anclado a 9 Km de la costa y un barco B está anclado a 3 Km. La distancia entre los barcos a lo largo de la costa es de 6 Km. Un bote parte de A llevando un pasajero a la costa para despues alcanzar al barco B. Ver figura 6.2.

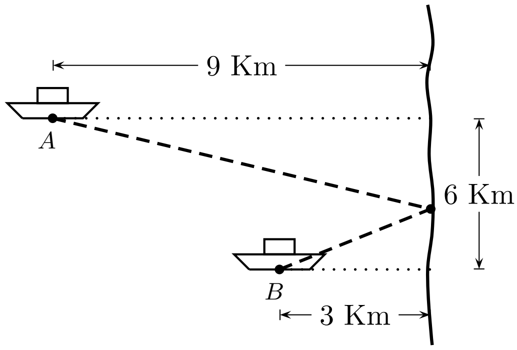


Figura 6.2

(a) ¿Cuál es la trayectoria más corta que puede tomar el bote para cumplir su cometido?

(b) Supongamos que el pasajero debe pagar al encargado del bote la cantidad de 100 pesos por cada kilómetro que cubra su viaje a la costa, mientras que el encargado debe pagar 100 pesos por cada kilómetro recorrido de la costa al barco B. Determine la trayectoria más redituable para el encargado del bote.

Problemas

41. ¿Cuál es el área máxima de un rectángulo circunscrito a otro rectángulo de base b y altura h.? Ver figura 6.3.

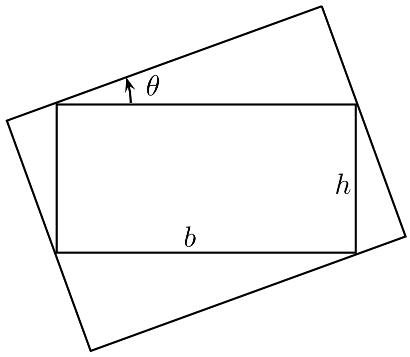


Figura 6.3 Diagrama para el problema 41

42. Sean A, B dos puntos de la parábola $y = x^2$. Encuentre la posición del punto P sobre la parábola y entre los puntos A y B tal que el área del triángulo APB sea máxima.

Respuestas y sugerencias

1. $c = 3$.

4. Aplicando el teorema del valor medio generalizado y tomando valores absolutos, tenemos que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{|f(b) - f(a)|}{|g(b) - g(a)|} = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)\right|}{\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c)\right|} < 1.$$

Por tanto,

$$|f(b) - f(a)| < |g(b) - g(a)|.$$

6a. Aplicando el teorema del valor medio a la función $\ln x$ en $[a, b]$,

$$\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b - a)$$

con $a < c < b$. De las propiedades de la función $\ln x$ se puede reescribir lo anterior en la forma

$$\frac{(b-a)}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{(b-a)}{a}.$$

Si $m > n \geqslant \mathrm{e}$, aplicando la fórmula con $b = m$ y $a = n$, se tiene

$$\ln \frac{m}{n} < \frac{(m-n)}{n} < \frac{(m-n)}{n} \ln n,$$

lo que podemos escribir en la forma

$$n \ln m - n \ln n < m \ln n - n \ln n,$$

o

$$n \ln m < m \ln n,$$

es decir,

$$\ln m^n < \ln n^m$$

y entonces

$$m^n < n^m.$$

Análogamente, si $\mathrm{e} \geqslant m \geqslant n$, se tiene

$$\ln \frac{m}{n} > \frac{(m-n)}{m} > \frac{(m-n)}{m} \ln m,$$

que reescribimos en la forma

$$m \ln m - m \ln n > m \ln m - n \ln m,$$

o

$$n \ln m > m \ln n,$$

es decir,

$$\ln m^n > \ln n^m$$

y entonces

$$m^n > n^m.$$

7. Sea la función

$$h(z) = z^{\frac{p}{q}},$$

y supongamos $x \geqslant y$. Aplicando el teorema del valor medio en $[x, x+y]$, se tiene

$$(x+y)^\alpha - x^\alpha = \alpha(x+\lambda y)^{\alpha-1} y$$

con $0 < \lambda < 1$. Por otro lado,

$$(x+\lambda y)^{\alpha-1} y = \left(\frac{y}{x+\lambda y}\right)^{1-\alpha} y^\alpha. \tag{6.1}$$

Tomando en cuenta que $1-\alpha > 0$ y

$$\left(\frac{y}{x+\lambda y}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{\frac{y}{x}}{1+\lambda\frac{y}{x}}\right)^{1-\alpha} < \left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} < 1,$$

sustituyendo en (6.1) se tiene

$$(x+y)^\alpha - x^\alpha = \alpha y^\alpha < y^\alpha,$$

de donde se concluye que

$$(x+y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha < 0.$$

8a. Tomando en cuenta que $g_n(0) = -1$ y $g_n(1) = 1$, deducimos que para cada $n \geqslant 2$ existe al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$. Esa raíz es la única raíz positiva, pues si existieran dos raíces en $(0,1)$ tendría que existir un punto en $(0,1)$ donde la derivada se anulara. Pero

$$\frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}x}(x) = nx^{n-1} + 1$$

nunca se anula en $(0,1)$; por lo tanto, sólo existe una raíz en $(0,1)$. Note también que la función g_n es creciente en $[1,\infty)$ y, en consecuencia, no puede tener otras raíces positivas en $[1,\infty)$.

8b. Tomando en cuenta que cada raíz positiva es mayor que cero y menor que uno, tenemos la estimación

$$r_{n+1} - r_n = 1 - r_{n+1}^{n+1} - 1 + r_n^n > -(r_{n+1}^{n+1} - r_n^{n+1}). \tag{6.2}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(x) = x^{n+1}$, se tiene

$$r_{n+1}^{n+1} - r_n^{n+1} = (n+1)c^n(r_{n+1} - r_n), \tag{6.3}$$

para algún c entre las raíces r_{n+1} y r_n. Sustituyendo (6.3) en (6.2),

$$r_{n+1} - r_n > -(n+1)c^n(r_{n+1} - r_n),$$

lo que implica que

$$r_{n+1} - r_n > 0.$$

Entonces la sucesión de raíces r_n es creciente y acotada y, por lo tanto, es convergente.

8c. De la expresión

$$r_n = 1 - r_n^n > 1 - r_n^m$$

para cada m y n suficientemente grandes, se tiene que si $\lim_{n\to\infty} r_n = L$, entonces

$$L + L^m \geqslant 1 \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$L \geqslant \frac{1}{1 + L^m} \text{ para } m \text{ suficientemente grande.}$$

Si $L < 1$ se tendrá $L \geqslant 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 1.$$

10. Sea $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$. Tomando la derivada,

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) = 2f(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) - 2g(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Por lo tanto, $h(x)$ =constante= $h(0) = 4$. Luego,

$$f^2(x) - g^2(x) = 4 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

11. Si escribimos

$$f(x) = (x-1)\,\mathrm{sgn}\,(x-1) + (x+2)\,\mathrm{sgn}\,(x+2),$$

entonces

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Es decir, la función es decreciente en $(-\infty, 2)$, es constante en $(-2, 1)$ y es creciente en $(1, \infty)$.

16a. En $x = -1$ se tiene un máximo local.

16b. En $x = 0$ y en $x = 1$ se tienen puntos de inflexión.

17. $x = 0$ no es punto de inflexión. La derivada de $f(x)$ tiene la expresión

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + c & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + c & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

con $c = 0$; luego, la función $f(x)$ que tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x^3 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{6}x^3 + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

satisface la condición del problema y el punto $x = 0$ es un mínimo local.

18a. No existe una función con tales propiedades ya que, de existir, se tendría una función creciente y acotada superiormente cuya derivada, digamos para todo $x \geqslant 1$, sería mayor o igual a un cierto valor $\alpha = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) > 0$, con lo cual se tendría, en virtud del teorema del valor medio, que para cada $n \geqslant 2$

$$f(n) \geqslant f(n-1) + \alpha \geqslant \cdots \geqslant f(1) + (n-1)\alpha$$

y cuando $n \to \infty$ se tendría que $f(n)$ crecería sin límite, lo cual contradice la condición de acotamiento superior por el número cero.

18b. Sí existen funciones con tales propiedades. Considérese, por ejemplo, la función

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

20a. La función derivada tiene la forma

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 6x^2 + 2cx + 2$$

y la segunda derivada,

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 12x + 2c.$$

Luego, el polinomio tiene puntos críticos si y sólo si su derivada tiene raíces reales, es decir si

$$4c^2 - 48 \geqslant 0,$$

o sea, si y sólo si

$$c^2 \geqslant 12,$$

equivalentemente, si y sólo si

$$-2\sqrt{3} \geqslant c \geqslant 2\sqrt{3}.$$

En este caso se tienen los puntos críticos

$$x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 12}}{6}, \qquad x_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 12}}{6}.$$

20b. Tomando en cuenta la solución del problema 20a, y evaluando los puntos críticos en la expresión para su segunda derivada, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_1) = 2(6x_1 + c) = 2\sqrt{c^2 - 12} > 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2) = 2(6x_2 + c) = -2\sqrt{c^2 - 12} < 0,$$

en cuyo caso x_1 corresponde a un valor mínimo local y x_2 a un máximo local. Si $c = \pm 2\sqrt{3}$ el criterio de la segunda derivada no da información sobre el carácter del punto.

20c. Para determinar los puntos de inflexión, se calculan las raíces de la segunda derivada, que en nuestro caso corresponden al valor

$$x_3 = -\frac{c}{6};$$

se calcula el signo de la tercera derivada,

$$\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x_3) = 12 \neq 0,$$

y entonces para cada valor real de c, el punto $x_3 = -\frac{c}{6}$ es el único punto de inflexión.

21a. Verdadero.

21b. Verdadero.

21c. Verdadero.

21d. Falso. Considere la función $f(x) = x^3 + x$, que tiene un punto de inflexión en $x = 0$ y sin embargo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 1$.

21e. Verdadero.

21f. Falso. Considere la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. El máximo absoluto en $[0, 1]$ es $f(1) = 1$; sin embargo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 1$.

21g. Falso. Considere la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

21h. Falso. Basta considerar la función $f(x) = x^3$ definida en todo $\mathbb{R}$.

23. De la hipótesis y del teorema del valor medio, se sigue que $f(h) - f(0) \geqslant ch$ si $h > 0$ y $f(h) - f(0) \leqslant ch$ si $h < 0$. Sea ahora $k \in \mathbb{R}$ y supongamos que $k \geqslant 0$. Tomando $h_1 > 0$ tal que $f(0) + ch_1 \geqslant k$ y $h_2 < 0$ tal que $f(0) + ch_2 < 0$, se tiene

$$k \in [f(h_2), f(h_1)]$$

y al ser f continua, por su propiedad de tomar los valores intermedios entre cada par de sus valores, existirá $x_0 \in [h_2, h_1]$ donde $f(x_0) = k$. Para $k < 0$, la prueba es análoga.

25. Aplicando el teorema de Taylor a la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ alrededor del punto $x = 0$, y para el polinomio de Taylor de orden dos dado mediante

$$P_0^2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8},$$

se tiene para el residuo la expresión

$$|R(x)| = \left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \right| \leqslant \frac{3}{16}|x|^3.$$

31b. Al calcular la derivada, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1);$$

luego, el único punto crítico en el dominio es $x_1 = -1$. Tomando la segunda derivada, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 3[(x-3) + (x+1)]$$

y entonces

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(-1) < 0.$$

Por otro lado

$$f(-2) = -2, \quad f(2) = -22 \text{ y } \quad f(-1) = 5.$$

Por lo tanto, el máximo absoluto se alcanza en $x = -1$, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en $x = 2$.

27a. $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = 0.$

27b. $\displaystyle \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x - \tan x} = \lim_{x \to 0+} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \sec^2 x} = \lim_{x \to 0+} \frac{2 \cos^3 x}{\operatorname{sen} x} = \infty.$

29a. Aplicando la primera regla de L'Hospital a la función

$$g(h) = f(x+h) - f(x-h)$$

resulta que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(h)}{2}.$$

Como la función derivada es continua en x, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+h) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+h) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

y, entonces, sustituyendo arriba,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(h)}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+h) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x-h)}{2} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

29b. Análogamente a lo hecho en 29a, aplicando dos veces el criterio de L'Hospital a la función

$$g(h) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h),$$

y considerando la continuidad de la función $g(h)$ y su derivada, se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(h)}{2h}$$

y en vista de que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(h) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+h) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x-h)\right] = 0,$$

el criterio de L'Hospital nos conduce a que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}h^2}(h)}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x+h) + \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x-h)}{2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x).$$

30. Considere la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Por el teorema de Taylor se tiene que

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_a)(x - x_a)(x-a),$$

donde x_a se encuentra del mismo lado que se encuentra x con respecto a a, es decir, se tiene siempre $(x - x_a)(x - a) > 0$. Por lo tanto,

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > 0$$

y evaluando g en el punto $\alpha a + \beta b$ con $\alpha + \beta = 1$, se tiene

$$f(\alpha a + \beta b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\alpha a + \beta b - a) > 0.$$

Reescribiendo esta última expresión y tomando en cuenta que $\alpha + \beta = 1$, se obtiene que

$$f(\alpha a + \beta b) > \alpha f(a) + \beta f(b).$$

33. Si representamos la altura del cono inscrito en la forma

$$h = 4 + s$$

con $0 < s < 4$, el volumen de un cono circular recto inscrito en la esfera de radio 4 expresado como función de la variable s toma la forma

$$V(s) = \frac{1}{3}\pi(16 - s^2)(4 + s).$$

Luego, tomando la derivada e igualando a cero, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{1}{3}\pi[(-2s)(4 + s) + (16 - s^2)] = 0,$$

es decir,

$$3s^2 + 8s - 16 = 0,$$

cuya raíz en el intervalo $(0, 4)$ es

$$s_1 = \frac{-8 + 16}{6} = \frac{4}{3}.$$

El valor de $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8 \cdot 16}{9}\right)\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{2^9\pi}{3^4}$ corresponde al máximo, ya que

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi(-8 - 6s) < 0.$$

41. Como se observa en la figura, el área A de cada rectángulo circunscrito al rectángulo dado está determinado por el valor del ángulo θ y se tiene la expresión

$$\begin{aligned} A(\theta) &= bh + (b^2 + h^2)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ &= bh + \frac{1}{2}(b^2 + h^2)\,\mathrm{sen}\,2\theta. \end{aligned}$$

Para encontrar el rectángulo circunscrito de área máxima, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = (b^2 + h^2)\cos 2\theta$$

y entonces los puntos críticos corresponden únicamente al valor

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2(b^2 + h^2)\operatorname{sen} 2\theta < 0,$$

se demuestra que $\theta = \frac{\pi}{4}$ es un máximo local y el valor máximo del área del rectángulo circunscrito es igual a

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(b + h)^2.$$

42. El problema se reduce a encontrar las coordenadas de la forma (x, x^2) tales que el triángulo de vértices $(a, a^2), (x, x^2)$ y (b, b^2) sea de área mínima. En tal caso, el área A del triángulo como función de x, toma la forma

$$A(x) = \frac{1}{2}[(x - a)(x^2 - b^2) - (x - b)(x^2 - a^2)].$$

Tomando derivadas, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{1}{2}[((x^2 - b^2) + 2x(x - a) - (x^2 - a^2) - 2x(x - b)] \\ &= \frac{1}{2}[(-b^2 + a^2) - 2ax + 2bx]\end{aligned}$$

y el único punto crítico es

$$x = \frac{1}{2}(a + b),$$

mientras que el área máxima tiene por valor

$$A\left(\frac{1}{2}(a + b)\right) = \frac{1}{4}\left|b - a\right|^3.$$

Capítulo

7

La función exponencial y sus aplicaciones

En este capítulo se propone una serie de ejercicios y problemas para afianzar el estudio y comprensión de las propiedades de las funciones de tipo exponencial y sus inversas. Se incluyen aplicaciones tanto al mismo cálculo como a problemas de la vida diaria.

7.1 Propiedades de exponenciales y logaritmos

Ejercicios

1. Encuentre en términos de la función exponencial, la función $f(x)$ tal que $f(0) = 2$ y
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = af(x), \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

2. Usando las propiedades de las funciones exponenciales, derive las siguientes fórmulas y propiedades.

   (a) $\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}x}(x) = rx^{r-1}$

   (b) $\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(x) = (\ln a)a^x, \quad a > 0.$

   (c) $\frac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x}(x) = (1 + \ln x)x^x$

   (d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)^{g(x)})(x) = \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}\right)f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0.$

3. Encuentre el número real α tal que la curva $f(x) = \mathrm{e}^x$ es tangente a la curva $g(x) = \alpha x^2$.

4. Aplicando el teorema del valor medio, pruebe que
$$\mathrm{e}^\pi > \pi^\mathrm{e}.$$

5. *Funciones hiperbólicas.* La función exponencial e^x se descompone como suma de las funciones $\cosh x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ y $\operatorname{senh} x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. A la función $\operatorname{senh} x$ se le llama *seno hiperbólico de* x y a la función $\cosh x$ se le llama *coseno hiperbólico de* x. Pruebe las afirmaciones siguientes:

   (a) $\cosh x$ es una función par y $\operatorname{senh} x$ es una función impar.

   (b) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \operatorname{senh} x$ y $\dfrac{\mathrm{d}\operatorname{senh} x}{\mathrm{d}x} = \cosh x$

   (d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
   $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x.$

6. Diga en qué intervalo real las funciones $\cosh x$, $\operatorname{senh} x$ y $\tanh x$ son uno a uno y demuestre que sus funciones inversas, denotadas por $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$, respectivamente, tienen las expresiones siguientes:

   (a) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ para $x \geqslant 1.$

   (b) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ para $x \in \mathbb{R}.$

   (c) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ para $-1 < x < 1.$

7. Se definen las funciones

$$\tanh = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

   Derive las fórmulas siguientes:

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

   (d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x.$

8. Deduzca las fórmulas siguientes para la derivada de las funciones inversas de las funciones trigonométricas hiperbólicas.

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{senh}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech}^{-1}x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$

9. Muestre que las funciones $\cosh kx$ y $\operatorname{senh} kx$ satisfacen ambas la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - k^2y(x) = 0.$$

10. A partir de la función exponencial, encuentre una función de la forma $h(x) = \exp(f(x))$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) = xh(x).$$

11. Deduzca las fórmulas para las derivadas siguientes:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln x)$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln(1-x)).$

Problemas

12. Resuelva la ecuación

$$4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}.$$

13. (a) Sea $g(x)$ una función real y derivable con $g(x) \neq 0$ en el intervalo (a, b). Demuestre la fórmula siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}\ln|g(x)|}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)}{g(x)}, \quad x \in (a, b).$$

(b) Aplicando la fórmula obtenida en 13a y las propiedades del logaritmo, pruebe que si la función $g(x)$ tiene la forma

$$g(x) = g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot \ldots \cdot g_n(x),$$

con $g_i(x)$ derivable para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = g(x)\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}x}(x)}{g_1(x)} + \frac{\dfrac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x}(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{\dfrac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}x}(x)}{g_n(x)}\right).$$

(c) Aplicando la fórmula del inciso 13b, calcule $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$ para

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{1}{x-1}\frac{1}{x-2}\frac{1}{x-3}\right).$$

14. Pruebe que para cualesquiera $x, y \in (0,1)$ se tiene

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y} \leq x^x y^y.$$

7.2 Aplicaciones elementales

Ejercicios

15. El azúcar se diluye en agua a una velocidad proporcional a la cantidad que queda por diluirse. Si se tenían 50 Kg de azúcar inicialmente y después de 5 horas sólo restan sin diluirse 20 Kg, ¿cuánto tiempo más se necesita para que se diluya el 90% del total de azúcar inicial?

16. Sea $x \geqslant 0$ y n un número natural. Aplicando el teorema del valor medio, muestre que

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{nx}{n+x^*},$$

donde $x^* \in [0,x]$. Haciendo uso de esta estimación, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

y deduzca la fórmula

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Esta última expresión es a veces usada como la definición de la función e^x.

17. Una especie de bacteria virulenta crece en un cultivo. Si la velocidad de crecimiento de la población bacteriana es proporcional al número de individuos presente, si en la población inicial hay 1000 bacterias y si el número de individuos se duplica después de los primeros 30 minutos, ¿cuántas bacterias habrá después de dos horas?

18. (a) Sustituyendo directamente, muestre que la función

$$p(t) = \frac{Lp(0)}{p(0)+(L-p(0))\mathrm{e}^{-kt}} \tag{7.1}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = \beta\left(1-\frac{p(t)}{L}\right)p(t).$$

Note que cuando el tiempo crece, la población tiende a la máxima población posible sustentable por el medio.

(b) Haciendo uso de la solución (7.1), diga en qué tiempo se duplica la población $p(t)$ si la población inicial $p(0)$ es igual a $\frac{L}{3}$.

(c) Encuentre el tiempo en que la población alcanza su máximo valor.

19. Un cono circular recto de 24 cm de altura y 6 cm de radio en su base, se llena con agua y se coloca con su vértice apuntando hacia abajo. El agua empieza a salir a través de un orificio en el vértice con una velocidad, en cada instante, igual a la altura del agua en el cono en el instante en cuestión. Diga cuánto tarda en vaciarse el cono.

20. Por vía intravenosa se administra una solución de glucosa en la corriente sanguínea, a tasa constante r. A medida que se agrega la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina de la sangre a una razón proporcional a la concentracion en cada instante, con constante de proporcionalidad k.

    (a) Si $c(t)$ es la función que en el tiempo t nos da la concentración de solución glucosa en la sangre, encuentre la ecuación diferencial que satisface la función $c(t)$.

    (b) Suponiendo que la concentración en el tiempo $t = 0$ es igual a c_0, determine, resolviendo la ecuación diferencial, la función $c(t)$ para todo t.

    (c) Si se supone $c_0 < \frac{r}{k}$, encuentre $\lim_{t \to \infty} c(t)$.

Respuestas y sugerencias

1. $f(x) = 2\mathrm{e}^{ax}$

3. Sea x tal que $\mathrm{e}^x = \alpha x^2$ y $\mathrm{e}^x = 2\alpha x$. Resolviendo para x, se tiene $x = 2$, y entonces el valor de α buscado es $\alpha = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2$.

4. Comparemos los logaritmos de los dos números propuestos, es decir

$$\pi \ln \mathrm{e} - \mathrm{e} \ln \pi.$$

Dividiendo entre πe, obtenemos

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \ln \mathrm{e} - \frac{1}{\pi} \ln \pi.$$

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln x;$$

por el teorema del valor medio,

$$f(\mathrm{e}) - f(\pi) = \left(\frac{-1}{x_0^2}\ln x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right)(\mathrm{e}-\pi) = \frac{1}{x_0^2}(1-\ln x_0)(\mathrm{e}-\pi).$$

Tomando en cuenta que $\mathrm{e} < x_0 < \pi$, entonces $1 - \ln x_0 < 0$ y $\mathrm{e} - \pi < 0$; luego,

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\ln \mathrm{e} > \frac{1}{\pi}\ln \pi$$

o

$$\ln \mathrm{e}^{\pi} > \ln \pi^{\mathrm{e}}$$

y entonces

$$\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}.$$

10. Sustituyendo la función $h(x)$ propuesta en la ecuación, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\exp(f(x)) = x\exp(f(x)),$$

lo que implica que la función $f(x)$ deberá satisfacer la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = x,$$

es decir,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c,$$

y la solución buscada será de la forma

$$h(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right).$$

12. Las únicas soluciones a la ecuación son $x = 0$ y $x = 1$. La ecuación no puede tener soluciones menores que cero. Por otro lado, si x fuera solución mayor que cero y distinta de uno, aplicando el teorema del valor medio a la función $f(\alpha) = \alpha^x$ obtendríamos

$$5^x - 4^x = x{\alpha_0}^{x-1} \quad \text{con} \quad 4 < \alpha_0 < 5,$$

y

$$6^{x^2} - 5^{x^2} = x^2\alpha_1^{x^2-1} \quad \text{con} \quad 5 < \alpha_1 < 6.$$

Entonces

$$x{\alpha_1}^{x^2-1} = \alpha_0^{x-1},$$
$$\ln x + (x^2-1)\ln\alpha_1 = (x-1)\ln\alpha_0,$$

o

$$\ln x = (x-1)\ln\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1^{x+1}}\right).$$

Esta última expresión no puede ser válida si $0 < x \neq 1$, ya que $\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1^{x+1}} < 1$.

14. Consideremos la función $f(x) = x \ln x$, cuya segunda derivada es siempre positiva, pues
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{1}{x} > 0.$$
Luego, su gráfica es cóncava hacia arriba y, por lo tanto, la recta que une los puntos $(x, x \ln x)$ y $(y, y \ln y)$ se encuentra por arriba de la gráfica de f restringida al intervalo $[x, y]$, y entonces, en el punto medio $\dfrac{x+y}{2}$, se tiene la desigualdad
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)),$$
es decir
$$\frac{x+y}{2} \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(x \ln x + y \ln y).$$
Se sigue que
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y} \leq x^x y^y.$$

17. Sea $p(t)$ la población de bacterias en el tiempo t (en minutos). La ley dinámica que gobierna el crecimiento de la población es
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = kp(t);$$
luego, la función de población tiene la forma
$$p(t) = A\mathrm{e}^{kt}.$$
Por otro lado,
$$p(0) = 1000 = A,$$
además
$$p(30) = 2000 = 1000\mathrm{e}^{30k},$$
y entonces
$$k = \frac{1}{30} \ln 2.$$
A partir de lo anterior, la función de población es
$$p(t) = 1000\mathrm{e}^{(\frac{1}{30}\ln 2)t}$$
y la población a las dos horas es igual a
$$p(120) = 1000\mathrm{e}^{4\ln 2} = 16000 \text{ bacterias}.$$

19. Denotemos por $V(t)$ el volumen de agua presente en el cono en el tiempo t. De las dimensiones del cono se tiene la relación

$$h(t) = 4r(t),$$

donde $h(t)$ y $r(t)$ denotan la altura y el radio del nivel del agua en el tiempo t. Por otro lado, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -h(t),$$

o equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4}h^3(t)\right) = -h(t),$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{3}\frac{1}{h(t)}.$$

Integrando, obtenemos que

$$h(t) = \sqrt{-\frac{8}{3}t + c},$$

y usando el hecho de que $h(0) = 24$, resulta que $c = 576$. Finalmente,

$$h(t) = \sqrt{576 - \frac{8}{3}t}.$$

Por lo tanto, el líquido se vaciará completamente cuando

$$t = 216 \text{ segundos}.$$

20a. Denotemos por $g(t)$ la función que a cada tiempo t le asocia la cantidad de glucosa en la sangre. Denotaremos por V el volumen de sangre en el cuerpo, al que consideramos fijo. Con los datos anteriores, podemos escribir

$$Vc(t) = g(t).$$

De la información del problema se tiene

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = r - kc(t),$$

es decir, en términos de la concentración $c(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{V} - \frac{k}{V}c(t).$$

20b. Para resolver la ecuación, la escribimos en la forma

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{V}c(t) = \frac{r}{V}.$$

Multiplicando ambos lados por la función $\mathrm{e}^{\frac{k}{V}t}$, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{V}t}c(t)\right) = \frac{r}{V}\mathrm{e}^{\frac{k}{V}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r}{k}\mathrm{e}^{\frac{k}{V}t}\right),$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{V}t}c(t) - \frac{r}{k}\mathrm{e}^{\frac{k}{V}t}\right) = 0$$

y

$$c(t) = c\mathrm{e}^{-\frac{k}{V}t} + \frac{r}{k}, \quad \text{con} \quad c = c_0 - \frac{r}{k}.$$

20c. Cuando el tiempo crece, se tiene $\lim_{t\to\infty} c(t) = \frac{r}{k}$.

Capítulo 8

La integral indefinida

8.1 Concepto de antiderivada

Ejercicios

1. Encuentre una antiderivada de la función $f(x) = x\mathrm{e}^x$, ensayando con funciones de la forma $y(x) = Ax\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^x$.

2. Calcule las integrales indefinidas siguientes:

   (a) $\displaystyle\int |x|\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int (|x-1| + |2x+1|)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \sum_{i=1}^{k} a_i x^i\,\mathrm{d}x.$

3. Verifique las fórmulas para las integrales indefinidas de las funciones racionales siguientes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{x^2+1} + c$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c$

   (d) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c$

   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| + c.$

8.2 Interpretación geométrica de la antiderivada

Problemas

4. Dibuje la gráfica de las funciones que forman la integral indefinida de la función cuya gráfica aparece en la figura 8.1.

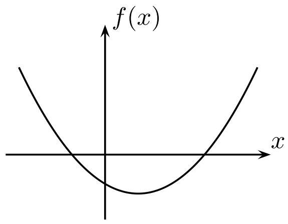


Figura 8.1

5. Dibuje la gráfica de la función $f(x)$ si f es continua, $f(1) = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 1$ y la gráfica de $\dfrac{d^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)$ es la que se muestra en la figura 8.2.

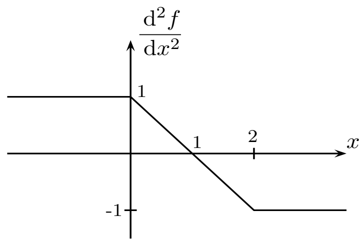


Figura 8.2

8.3 Métodos de integración

Ejercicios

6. Aplicando el método de integración por sustitución, encuentre las integrales indefinidas siguientes:

   (a) $\displaystyle\int x\sqrt{25 + x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

7. Aplicando el método de integración por partes, calcule las integrales indefinidas siguientes:

   (a) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$.

8. Aplicando el método de fracciones parciales, encuentre las integrales indefinidas siguientes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-a^4}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x$.

9. Haciendo sustituciones trigonométricas, calcule las integrales indefinidas siguientes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

8.4 Antiderivadas diversas

Ejercicios

Calcule las antiderivadas siguientes:

10. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} b\,x \,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen}(x^2) \, \mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int \arctan x \, \mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int x \tan^2 x \, \mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} \, \mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \, \mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2 + x^4} \, \mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int x^a \ln x \, \mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int x \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int x^a (\ln x)^m \, \mathrm{d}x$, donde m es número entero.

24. $\displaystyle\int \frac{1}{x + x^n} \, \mathrm{d}x$, donde n es número entero $n \neq 1$.

25. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}} \, \mathrm{d}x$

26. $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x$, donde m es número entero.

27. $\displaystyle\int \sqrt{1 - \operatorname{sen} x} \, \mathrm{d}x$

28. $\displaystyle\int (x^6 + x^3) \sqrt[3]{x^3 + 2} \, \mathrm{d}x$

29. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

30. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int \tan^4(\pi x)\,\mathrm{d}x$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}\,\mathrm{d}x$

33. $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}\,\mathrm{d}x$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8-2}\,\mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x$

36. $\displaystyle\int 3^x\cdot 5^x\,\mathrm{d}x$

37. $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

38. $\displaystyle\int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,\mathrm{d}x$

39. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x$

40. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x$

41. $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}\,\mathrm{d}x.$

43. Mediante el cálculo de la integral indefinida de la función $g(x)$, encuentre la función $f(x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=g(x)$$

y que, además, satisfaga la condición señalada a la derecha, para los casos siguientes:

(a) $g(x) : (-3, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x+3} \quad$ y $\quad f(0) = 1.$

(b) $g(x) : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x-1} \quad$ y $\quad f(2) = 0.$

(c) $g(x) : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \tan x \quad$ y $\quad f(0) = 0.$

44. Deduzca las fórmulas siguientes:

(a) $\displaystyle\int \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n+1}{n}\int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x$, donde n es un número natural.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,\mathrm{d}x$, donde $n > 2$ es un número entero.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2} x}\,\mathrm{d}x$, donde $n > 2$ es un número entero.

Problemas

45. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$. Supongamos que $Q(x)$ sólo tiene raíces reales, es decir, que se puede factorizar en la forma

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, de tal manera que la descomposición en fracciones parciales de la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_1)}.$$

(a) Demuestre que

$$A_j = \frac{P(a_j)}{\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(a_j)}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Esto nos da un método para el cálculo de las constantes A_j en la descomposición en fracciones parciales cuando el denominador $Q(x)$ se puede factorizar como un producto de factores lineales.

(b) Haciendo uso del resultado obtenido en 45a, calcule la integral indefinida

$$\int \frac{3x^2+x+2}{(x^2-1)(x^2+5x+6)}\,\mathrm{d}x.$$

46. Haciendo la sustitución $y^2 = \dfrac{x-q}{x-p}$, calcule la integral indefinida
$$\int \sqrt{(x-p)(x-q)}\, \mathrm{d}x.$$

47. Encuentre un polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(0) = 1$ y
$$\int \frac{P(x)}{x^3(x+1)^2}\, \mathrm{d}x$$
es una función racional.

48. Determine $K_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, \mathrm{d}x$, $n = 1, 2, \ldots$

Respuestas y sugerencias

1. A partir de la definición de antiderivada o primitiva, se deberá tener
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = A\mathrm{e}^x + Ax\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x;$$
luego, tomando $A = 1$ y $B = -1$, se obtiene que la función $y(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ es una antiderivada de $f(x)$.

2a. $$\int |x|\, \mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + c & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + c & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2b. $\displaystyle\int (|x-1| + |2x+1|)\, \mathrm{d}x = \int |x-1|\, \mathrm{d}x + \int |2x+1|\, \mathrm{d}x.$

Por un lado,
$$\int |x-1|\, \mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{2} + c_1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2} + c_2 & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$
donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por otro lado,
$$\int |2x+1|\, \mathrm{d}x = \begin{cases} -x^2 - x - \dfrac{1}{4} + d_1 & \text{si } x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + x + \dfrac{1}{4} + d_2 & \text{si } x \geqslant -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

donde d_1 y d_2 son constantes arbitrarias. Con la información anterior se tiene

$$\int (|x-1|+|2x+1|)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{4}+k_1 & \text{si } x\leqslant -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{4}+k_2 & \text{si } -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{4}+k_3 & \text{si } x\geqslant 1, \end{cases}$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes arbitrarias.

2c. $\displaystyle\int \sum_{i=1}^{k} a_i x^i\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}.$

5. En la figura 8.3 se muestran las funciones $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ y $f(x)$.

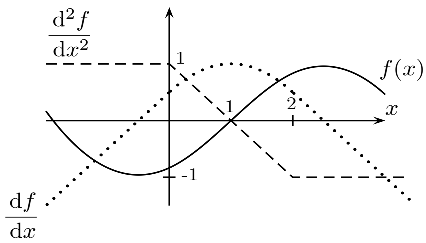


Figura 8.3

7a. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsen} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arcsen} x - \int x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsen} x\,\mathrm{d}x$

$$= x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

7b. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c.$

7c. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\int x^2 \frac{d}{\mathrm{d}x}\cos x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Por otro lado,

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\frac{\mathrm{d}\operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\operatorname{sen} x + \cos x.$$

Sustituyendo en la relación de arriba, se tiene que

$$\int x^2\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c.$$

8a. Expresando en fracciones parciales se tiene

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^3+8} &= \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})} = \\ &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+1-\sqrt{5})} + \frac{C}{(x+1+\sqrt{5})}\end{aligned}$$

con $A = 3$, $B = \dfrac{17-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}$ y $C = \dfrac{-17-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{17-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}\int \frac{1}{(x+1-\sqrt{5})}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{-17-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}\int \frac{1}{(x+1+\sqrt{5})}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln|x+2| + \frac{17-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}\ln|x+1-\sqrt{5}| \\ &\quad + \frac{-17-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}\ln|x+1+\sqrt{5}| + c.\end{aligned}$$

8b. Haciendo la sustitución $u = x^2 - x + 1$, se obtiene que $\mathrm{d}u = (2x-1)\,\mathrm{d}x$ y podemos escribir

$$\int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u\right) \circ (x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tomando en cuenta que

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c,$$

se tiene que

$$\int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right] + c.$$

8c. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-a^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}\,\mathrm{d}x.$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene que

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-a} + \frac{Cx+D}{x^2+a^2},$$

donde $A = -\dfrac{1}{4a^2}$, $B = \dfrac{1}{4a^2}$, $C = 0$, $D = -\dfrac{1}{2a^2}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 - a^4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{-1}{4a^2}}{x+a}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{4a^2}}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{-1}{2a^2}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{4a^2}\ln|x+a| + \frac{1}{4a^2}\ln|x-a| - \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + c \\ &= \frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + c.\end{aligned}$$

8d. Haciendo la sustitución $u = \mathrm{e}^x$, podemos escribir

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4}\,\mathrm{d}x = \left(\int \frac{1}{u(u^2-4u+4)}\,\mathrm{d}u\right) \circ (\mathrm{e}^x).$$

Ahora, expandiendo en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{1}{u(u^2-4u+4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{(u-2)^2}$$

con $A = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{-1}{4}$, $C = \dfrac{1}{2}$. Sustituyendo,

$$\int \frac{1}{u(u^2-4u+4)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln|u-2| - \frac{1}{2}\frac{1}{u-2}$$

y, finalmente,

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\ln|\mathrm{e}^x - 2| - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^x - 2} + c.$$

9a. Reescribiendo la integral indefinida a calcular, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{a^3x^2}{\left((\frac{x}{a})^2 + 1\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right) \circ \left(\frac{x}{a}\right).\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (8.8) del libro *Fundamentos del Cálculo* se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}u &= \int \left(\frac{1}{(u^2+1)^{1/2}} - \frac{1}{(u^2+1)^{3/2}}\right)\mathrm{d}u \\ &= \left(\int (\sec\theta - \cos\theta)d\theta\right) \circ (\arctan u) \\ &= -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \ln|\sqrt{1+u^2} + u|.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\frac{1}{a}|\sqrt{a^2+x^2} + x|\right) + c.$$

9b. $\frac{1}{5}(x^2+6)(x^2-9)\sqrt{9-x^2}+c$

11. $\dfrac{a \operatorname{sen} bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\ \mathrm{e}^{ax}+c$

33. $(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot \operatorname{sgn}(\cos x-\operatorname{sen} x)+c$

34. $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right|+c$

35. $\ln|\ln(\ln x)|+c$

36. $15^x/\ln 15$

37. $4(x^2+7)/(7\sqrt[4]{x})$

38. $\dfrac{1}{75}\left(\dfrac{3}{8}t^{8/3}-2\cdot\dfrac{3}{5}t^{5/3}\right)+c$, donde $t=2-5x^3$

39. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$ si $x>a$,
$-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$ si $x<-a$.
Sugerencia: Efectúe el cambio de variable $x=\dfrac{a}{\cos 2t}$.

40. $\dfrac{\pi}{2}(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)+c$

41. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+c$

42. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+c.$
Sugerencia: es necesario hacer varios cambios de variable.

45a. Basta escribir

$$P(a_i)=A_i(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)$$

y observar que

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(a_i)=(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)$$

para concluir que

$$A_i=\frac{P(a_i)}{\dfrac{dQ}{\mathrm{d}x}(a_i)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

46. Haciendo la sustitución $y^2 = \dfrac{x-q}{x-p}$, de donde se obtiene que $2y\,\mathrm{d}y = \frac{q-p}{(x-p)^2}\,\mathrm{d}x$, se tiene que

$$\int \sqrt{(x-p)(x-q)}\,\mathrm{d}x = -(q-p)^2\Big(\int \frac{2y^2}{(y^2-1)^3}\,\mathrm{d}y\Big)\circ\Big(\sqrt{\frac{x-q}{x-p}}\Big).$$

Entonces

$$\int \frac{y^2}{(y^2-1)^3}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y^2-1+1}{(y^2-1)^3}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{(y^2-1)^3}\,\mathrm{d}y.$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2}\Big]$$
$$\frac{1}{(y^2-1)^3} = \frac{1}{16}\Big[\frac{-3}{y+1} + \frac{-3}{(y+1)^2} + \frac{-2}{(y+1)^3} + \frac{3}{y-1} + \frac{-3}{(y-1)^2} + \frac{2}{(y-1)^3}\Big].$$

Entonces

$$\int \frac{y^2}{(y^2-1)^3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\Big[\ln\frac{|y+1|}{|y-1|} - \frac{2y(y^2+1)}{(y^2-1)^2}\Big].$$

Finalmente,

$$\int \sqrt{(x-p)(x-q)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(q-p)\,\Big[\ln|(x-p)(2x-p-q)| + \\ -2\sqrt{\frac{x-q}{x-p}}\,\frac{(x-p)(2x-p-q)}{q-p}\Big] + c.$$

43a. $f(x) = \ln(x+3) + \dfrac{2}{3}$

43b. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+6)^2 + 12\ln(x-1) - 32$

43c. $f(x) = -\ln\cos x$

47. Los polinomios buscados son de la forma$P(x) = ax^2 + bx + 1$. Al descomponer la función racional $\dfrac{P(x)}{x^3(x+1)^2}$, se tendrá

$$\frac{ax^2+bx+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{F}{(x+1)^2}.$$

Si se quiere que la integral indefinida sea una función racional, se deberá requerir que $A = D = 0$, ya que, de otra manera, los términos correspondientes a esos coeficientes darían lugar, al integrar, a funciones logarítmicas. Por lo tanto,

$$\frac{ax^2+bx+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{F}{(x+1)^2},$$

o

$$ax^2 + bx + 1 = Bx(x+1)^2 + C(x+1)^2 + Fx^3,$$

de donde

$$B + F = 0,\ a = 2B + C,\ b = B + 2C,\ C = 1.$$

Luego, el polinomio buscado es de la forma

$$P(x) = ax^2 + \frac{a+3}{2}x + 1.$$

48 Utilice integración por partes para obtener una fórmula recursiva con la que sea posible evaluar K_n, partiendo del hecho que, para $n = 1$, la integral es conocida.

Capítulo

9 La integral definida y el teorema fundamental del cálculo

El conjunto de ejercicios y problemas de este capítulo tiene como propósito revisar los conceptos y propiedades principales de la integral de Riemann de funciones continuas, así como los relacionados con el teorema fundamental del cálculo, su significado y sus aplicaciones al cálculo de integrales. Se incluyen varios ejercicios sobre integrales impropias.

9.1 La integral de Riemann de funciones continuas

Ejercicios

1. Evalúe el limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right).$$

2. Calcule los límites siguientes:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{4n}{n}\right)^3\right]$

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}$

   (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^3+\left(\frac{n+2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^3\right].$

3. Evalúe la integral definida

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^{2+x}}}\,\mathrm{d}x.$$

4. Haciendo uso de las propiedades de la integral definida, resuelva los problemas siguientes:

   (a) Sea f una función continua tal que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.
   Calcule $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Demuestre que $\sqrt{3} \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{11}$.

   (c) Demuestre que $\left|\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \pi$.

   (d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y con derivada continua tal que
   $\displaystyle\int_0^1 f(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\mathrm{d}x = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\mathrm{d}x = 18$.
   Calcule $\displaystyle\int_0^1 f^4(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\mathrm{d}x$.

5. Calcule el área de las regiones siguientes.

   (a) $S = \{(x, y)$ tales que $x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x\}$

   (b) $S = \left\{(x, y) \text{ tales que } x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right\}$

   (c) $S = \left\{(x, y) \text{ tales que } 3 < x \leqslant 7,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}\right\}$.

6. Calcule las integrales definidas propuestas enseguida.

   (a) $\displaystyle\int_0^2 |t^2 - t|\,\mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x$, donde $\operatorname{sign} x = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ y $\operatorname{sign} 0 = 0$.

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

7. Pruebe las fórmulas importantes siguientes:

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,\mathrm{d}x = 0$
   si $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,\mathrm{d}x = \pi$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x \,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n} n! n!}{(2n+1)!}.$

8. Una función continua satisface la identidad $f(2x) = 3f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ¿cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$?

9. Calcule el área de la región bajo la curva $y = \dfrac{4}{2x+1} - \dfrac{2}{x+2}$, arriba del eje de las abscisas y a la derecha de $x = 1$.

10. (a) Pruebe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4(1-t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{22}{7} - \pi.$

    (b) Evalúe $\displaystyle\int_0^1 t^4(1-t)^4\,\mathrm{d}t$ y deduzca que $\dfrac{22}{7} - \dfrac{1}{1260} > \pi > \dfrac{22}{7} - \dfrac{1}{630}.$

11. Sea f una función continua estrictamente creciente tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Sea g la función inversa de f. Muestre que

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Problemas

12. (a) Pruebe el siguiente teorema del valor medio para integrales. Sean $f(x)$ continua y $g(x)$ no-decreciente y con segunda derivada continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

para algún $c \in (a, b)$.

    (b) Aplicando el teorema en (a), pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Para ello utilice el método de integración por partes y el segundo teorema del valor medio para integrales (página 191 del libro *Fundamentos del Cálculo*).

13. Sea $\theta_n = \arctan n$. Pruebe que para $n = 1, 2, \ldots$

$$\theta_{n+1} - \theta_n < \frac{1}{n^2+n}.$$

14. (a) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Evalúe la integral $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

15. Pruebe que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\displaystyle\int_0^\pi x^\lambda \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 3$.

16. Considere la función $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos t \cos(x-t)\,\mathrm{d}t$. Calcule el valor mínimo de $f(x)$.

9.2 El teorema fundamental del Cálculo

Ejercicios

17. Un automóvil, durante un recorrido de 30 minutos, registra en su velocímetro que la velocidad instantánea $v(t)$ en el tiempo t, medida en kilometros por hora, es igual a

$$v(t) = t^2 + 1.$$

¿Cuál es el desplazamiento neto del automóvil durante ese intervalo de tiempo?

18. Sea $f(x)$ una función continua, y sean $g(x)$ y $h(x)$ funciones derivables. Deduzca las fórmulas de derivación siguientes:

(a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(s)\,\mathrm{d}s = f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$

(b) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(s)\,\mathrm{d}s = f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) - f(h(x))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)$

(c) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^b f(sx)\,\mathrm{d}s\right)(1) = -\int_0^b f(s)\,\mathrm{d}s + bf(b).$

Problemas

19. Sea $f : (p,q) \to \mathbb{R}$ una función con derivadas hasta de orden k en el intervalo (p,q) y sea $a \in (p,q)$. Por el teorema fundamental del cálculo, para cada $c \in (p,q)$ podemos escribir

$$f(a) - f(c) = \int_c^a \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)ds.$$

(a) Escriba esta integral utilizando dos veces la fórmula de integración por partes para obtener

$$\begin{aligned} f(a)-f(c) &= (s-a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)\Big|_c^a - \int_c^a (s-a)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= (a-c)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) + \frac{1}{2}(a-c)^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) + \frac{1}{2}\int_c^a (s-a)^2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Como esto vale para dos puntos a, c arbitrarios de (p, q), podemos escribir en lugar de a el valor x y en lugar de c el valor a para obtener

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (s-x)^2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Al término

$$R_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_a^x (s-x)^2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(s)\,\mathrm{d}s$$

se le llama el *residuo de Taylor de orden tres en forma integral.*

(b) Deduzca la forma integral del residuo de Taylor de orden n.

20. Sea

$$f(x) = \int_x^{x+\pi} |t \operatorname{sen} t|\,\mathrm{d}t.$$

(a) Evalúe $f(0)$ y $f(-\pi)$.

(b) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

(c) Muestre que f es creciente en $[0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -\pi]$.

(d) ¿Cuál es el valor mínimo de f?

21. (a) Sea la función

$$g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Muestre que $\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x) = f(x)$.

(b) Sea

$$G(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Evalúe $\dfrac{\mathrm{d}^n G}{\mathrm{d}x^n}(x)$.

22. Sea $a > 0$. Encuentre el valor de a para el cual la integral

$$\int_a^{a^2} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

toma el valor mínimo posible.

9.3 Integrales impropias

Ejercicios

23. Calcule las integrales impropias siguientes.

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, donde $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

24. Utilizando el criterio de comparación:

   (a) Pruebe que la función e^{-x^2} tiene integral impropia en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$. SUGERENCIA: Note que $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ para toda $x \in [1,\infty)$ y que $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$ para toda $x \in [0,1]$.

   (b) Pruebe que la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ tiene integral impropia en el intervalo $[0,\infty)$. SUGERENCIA: compare la función en cuestión con las funciones $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ en los subintervalos apropiados.

25. Calcule las integrales impropias siguientes:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$

26. Calcule la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x.$

27. En cada caso, evalúe la integral dada

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,\mathrm{d}x.$

28. Evalúe $L = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}.$

Respuestas y sugerencias

1. La suma en cuestión es una suma de Riemann de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0,1]$, correspondiente a la partición $\mathcal{P} = 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} 1.$$

2a. $\frac{1}{4}$

2b. $\frac{1}{6}$

2c. $\frac{15}{4}$

3. Aplicando el método de integración por sustitución y haciendo $y = 2\sqrt{x^2+x}$ (de donde se obtiene que $\mathrm{d}y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$), podemos escribir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}} = \left(\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\right) \circ (2\sqrt{x^2+x}) = \\ = \arctan(2\sqrt{x^2+x}).$$

Luego

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

6a. $\displaystyle\int_0^2 |t^2 - t|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-t^2+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 t^2 - t\,\mathrm{d}t = 1$

6b. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\operatorname{sign}x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1$

6c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x = 2$

6d. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{18} - \ln 2$, tomando en cuenta que $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\mathrm{d}x = \tan x - x$.

8. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(2u)\,\mathrm{d}u = 6\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 6.$

12a. Sea $F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - F(c)\int_a^b \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (g(b)-g(a))\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En la tercera igualdad anterior, se ha usado el segundo teorema del valor medio para integrales (ver Corolario 9.5, del texto *Fundamentos del Cálculo*).

12b. $$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x}\operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}\int_c^b \operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\int_a^c \operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{bn}\cos nx\Big|_c^b - \frac{1}{na}\cos nx\Big|_a^c\end{aligned}$$

y entonces

$$\left|\int_a^b \frac{1}{x}\operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{na}.$$

13. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} - \theta_n &= \arctan(n+1) - \arctan n\\ &= \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} < \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\ &= -\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

14a. Aplicando las propiedades de la integral, se tiene

$$\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x.$$

Haciendo la sustitución $y = \pi - x$ y tomando en cuenta que $\operatorname{sen}(\pi - y) = \operatorname{sen} y$ se obtiene que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - y) f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y.$$

Sustituyendo en la fórmula anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y$$

y la última integral, haciendo la sustitución $z = -y + \pi$, se puede escribir en la forma

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\operatorname{sen} z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} z)\,\mathrm{d}z.$$

Entonces

$$\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y.$$

Finalmente,

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} y)\,\mathrm{d}y.$$

14b. Haciendo uso del resultado del inciso (a), tenemos

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Haciendo ahora la sustitución $y = \cos x$,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\left(\int \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y\right)(\cos x) = -\arctan(\cos x).$$

Finalmente

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

15. Considere la función
$$h(\lambda) = \int_0^{\pi} x^{\lambda} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$
y observe que
$$h(0) = 2 \quad \text{y} \quad h(1) = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \pi.$$
Por otro lado, al ser $h(\lambda)$ continua, por la propiedad del valor intermedio deberá existir $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que$h(\lambda_0) = 3$.

16. Tomando la derivada de $f(x)$, se tiene
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \int_0^{\pi} -\cos t \operatorname{sen}(x-t) \, \mathrm{d}t \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$
Pero
$$\int_0^{\pi} -\cos t \operatorname{sen}(x-t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (-\cos^2 t \operatorname{sen} x + \cos x \cos t \operatorname{sen} t) \, \mathrm{d}t = -\frac{\pi \operatorname{sen} x}{2} = 0.$$
Luego, los puntos $x = 0, \pi, 2\pi$ son puntos críticos de f.

Tomando la segunda derivada se tiene
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = -\frac{\pi \cos x}{2},$$
que toma un valor positivo $x = \pi$. Luego, el valor mínimo de la función es
$$\int_0^{\pi} -\cos^2 t \, \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}.$$

17. Como $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, donde $p(t)$ es el desplazamiento del automóvil medido desde un punto de referencia, se tiene
$$p(t) - p(0) = \int_0^{.5} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + t \Big|_0^{.5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} = \frac{13}{24}.$$

18c. Sustituyendo $u = sx$ y $du = xds$, se tiene
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^b f(sx) \, \mathrm{d}s\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^b f(sx) \, \mathrm{d}s\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{bx} \frac{1}{x} f(u) \, \mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\int_0^{bx} f(u) \, \mathrm{d}u\right) = -\frac{1}{x^2}\int_0^{bx} f(u) \, \mathrm{d}u + \frac{b}{x} f(bx),
\end{aligned}$$
y evaluando en $x = 1$, se obtiene que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^b f(sx) \, \mathrm{d}s\right)(1) = -\int_0^b f(s) \, \mathrm{d}s + bf(b).$$

20a.

$$f(0) = \int_0^\pi |t \operatorname{sen} t| \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi t \operatorname{sen} t \, \mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^\pi t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos t \, \mathrm{d}t = -t \cos t \Big|_0^\pi + \operatorname{sen} t \Big|_0^\pi = \pi.$$

20b. Si escribimos $f(x) = -\int_0^x |t \operatorname{sen} t| \, \mathrm{d}t + \int_0^{x+\pi} |t \operatorname{sen} t| \, \mathrm{d}t$, concluimos que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -|x \operatorname{sen} x| + |(x+\pi) \operatorname{sen} x|.$$

20c. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = x|\operatorname{sen} x| - (x+\pi)|\operatorname{sen} x| < 0$ si $x \in (-\infty, -\pi]$, y la función es decreciente. Por otro lado, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -x|\operatorname{sen} x| + (x+\pi)|\operatorname{sen} x| > 0$ si $x \in [0, \infty]$ y $f(x)$ es creciente en $[0, \infty)$.

20d. La función $f(x)$ no es acotada superiormente.

21a. Escribiendo

$$g(x) = x \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t - \int_0^x t f(t) \, \mathrm{d}t$$

se tiene

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

y entonces

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x) = f(x).$$

21b. Sea $h_1(x)$ una primitiva de $f(x)$, es decir $\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$. Integrando por partes,

$$G(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} h_1(t) \, \mathrm{d}t,$$

y, aplicando el argumento $n-2$ veces, se tiene

$$G(x) = \int_0^x (x-t) h_{n-2}(t) \, \mathrm{d}t,$$

donde

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}x} = h(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 h_1}{\mathrm{d}x^2} = f(x)$$

y

$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}x} = h_1(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^3 h_2}{\mathrm{d}x^3} = f(x)$$

y, así sucesivamente,

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} h_{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x) = f(x).$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x) = \int_0^x h_{n-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

y, finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}^n G}{\mathrm{d}x^n}(x) = f(x).$$

22. Sea la función

$$g(a) = \int_a^{a^2} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Calculando su derivada, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}a}(a) = -\frac{1}{a+\sqrt{a}} + \frac{2}{a+1}.$$

Para encontrar los puntos críticos, hacemos

$$\frac{1}{a+\sqrt{a}} = \frac{2}{a+1},$$

de donde se obtiene que los puntos críticos son

$$a_1 = 3-\sqrt{8}, \qquad a_2 = 3+\sqrt{8}.$$

Tomando segunda derivada y evaluando en estos puntos, se comprueba que a_1 es mínimo relativo y a_2 es máximo relativo. Entonces,

$$\min g(a) = g(3-2\sqrt{2}).$$

23a. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-tx}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}.$

23b.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\int_h^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x + \lim_{h\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{h} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

25a. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\int_h^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}h^2(\ln h - \frac{1}{2}) \to -\infty.$

25c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to\frac{\pi}{2}}\int_0^h \tan x\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to\frac{\pi}{2}}(-\ln\cos(h)) \to \infty.$

25e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$

25f. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}.$

26. Aplicando el teorema del valor medio para integrales enunciado en el problema 12a, se tiene

$$\int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\int_c^n \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1}\int_1^c \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$$

27a. $1/6$

27b. $2\pi \operatorname{sen}\alpha$

28. $L = 1$

Capítulo

10

Aplicaciones de la integral definida

Las aplicaciones más naturales de la integral definida son al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes y a la determinación de la resultante total de sumas de efectos puntuales, como es el caso del cálculo de presiones sobre superficies o la determinación de centros de masa. En este capítulo se propone una serie de ejercicios y problemas sobre ese tipo de aplicaciones.

10.1 Cálculo de áreas y volúmenes

Ejercicios

1. Calcule el área de la región delimitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

2. Encuentre el área de la región A del primer cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \arccos x$ por arriba y por la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ por abajo.

3. Determine el valor positivo de a para que la parábola $y = x^2 + 1$ bisecte el área del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a^2 + 1)$ y $(a, a^2 + 1)$.

4. Calcule el área de la región delimitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

5. Calcule el área de la región comprendida entre las parábolas $-x^2 + 2 = y$ y $y = 2x^2 - 3$.

6. Encuentre el área de la región en el plano xy formada de los puntos (x, y) tales que
$$x^6 - x^2 + y^2 \leqslant 0.$$

7. Demuestre que la longitud L de la circunferencia de radio r es igual a $2\pi r$.

8. Calcule el área del elipsoide de revolución de eje mayor a y eje menor b.

9. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

10. Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar sobre el eje de las ordenadas la gráfica de la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0,1]$.

11. El triángulo de vértices $(1003,0)$, $(1004,3)$ y $(1005,1)$ en el plano x, y se hace girar arededor del eje de las ordenadas. Encuentre el volumen del sólido generado.

12. Calcule el área A de la superficie de revolución generada al girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $y = r$.

13. El volumen del agua de un tazón se evapora a una razón que es proporcional al área de la superficie del agua expuesta al sol. Muestre que la profundidad del agua disminuye a una velocidad constante sin importar la forma del tazón.

14. Se genera un sólido de revolución al rotar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje de las abscisas donde $f(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$. Si el volumen generado por la parte de la curva que va de $x = 0$ a $x = b$ es igual a b^2 para toda $b > 0$, halle la función $f(x)$.

15. (a) Se perfora un agujero de radio r a través de una esfera de radio $R > r$ (ver figura 10.1). Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

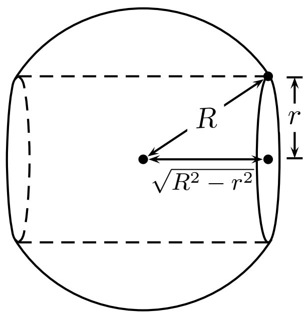


Figura 10.1

(b) ¿De qué radio debe hacerse el agujero para remover la mitad de la esfera?

Problemas

16. Una esfera de radio R se intersecta con una esfera de radio $r < R$ y centro sobre la superficie de la primera esfera. Calcule el volumen del sólido que determina la intersección de las dos esferas. En le figura 10.2 se muestra de manera esquemática la intersección de las esferas en cuestión con el plano xy.

17. (a) Encuentre la fórmula (expresada en términos de una integral) para el cálculo del volumen removido al perforar un cilindro de radio R con un

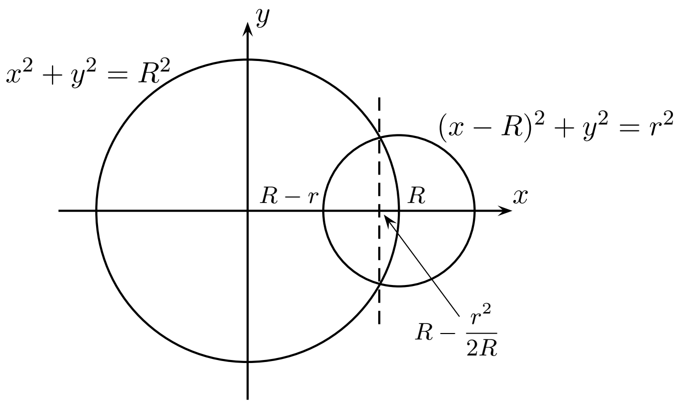


Figura 10.2

agujero de radio $r < R$, realizado en dirección perpendicular al eje del cilindro.

(b) Utilizando la fórmula del ejercicio 17a, calcule el volumen removido cuando $r = R$.

18. (a) Se tiene un tanque horizontal de forma cilíndrica de longitud l y sección transversal circular de radio r; el tanque contiene gasolina hasta una altura h, medida desde suelo. Encuentre la fórmula para el volumen V de gasolina que contiene como función $V(h)$ de la altura h.

    (b) Calcule el volumen $V(h)$ como función de la altura en el caso de que la sección transversal sea una elipse de semieje mayor a y semieje menor b.

19. Supongamos que el tanque del problema 18 no es horizontal, sino que se encuentra inclinado de modo que su eje central forma un ángulo θ con el nivel del suelo. Encuentre una fórmula para el volumen V como función de la altura h del nivel de gasolina.

10.2 Cálculo de centroides y centros de masa

20. Sea S la región delimitada por las curvas $y = x^m$ y $y = x^n$ para $x \in [0, 1]$, donde m, n son enteros con $0 \leqslant n < m$.

    (a) Dibuje la región S.

    (b) Calcule las coordenadas del centroide de S.

    (c) Determine para qué valores de n y m el centroide no está contenido en S.

21. En cada caso, encuentre la masa y el centro de masa:

    (a) Una región A del plano con densidad $\rho(x)$ (es decir, constante a lo largo de puntos con la misma ordenada), formada por los puntos (x, y) tales que
    $$A = \{(x, y) \text{ con } a \leqslant x \leqslant b \text{ y } f(x) \leqslant x \leqslant g(x)\},$$
    donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas definidas en $[a, b]$.

    (b) Una región A semicircular dada por
    $$A = \left\{(x, y) \text{ con } x^2 + y^2 \leqslant a^2 \text{ y } 0 \leqslant y\right\},$$
    donde la densidad $\rho(s) = ks$ es función de la distancia s del punto al origen (es decir, es lineal radialmente).

    (c) Un cono circular recto de radio r y altura h. La densidad del material en cada punto es proporcional a la altura z en que se encuentra, medida desde la base del cono; es decir, $\rho(z) = kz$.

22. Calcule el centroide de los conjuntos siguientes.

    (a) El sector circular
    $$S = \left\{(x, y) \text{ con } x^2 + y^2 \leqslant a^2 \text{ y } 0 \leqslant y \leqslant x\right\}.$$

    (b) El cuadrilátero con vértices $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ y $(2, -2)$.

    (c) La región en el primer cuadrante delimitada por el arco de un cuarto de circunferencia
    $$x^2 + y^2 = r^2 \text{ con } 0 \leqslant x \leqslant r, \quad y \geqslant 0.$$

    (d) El cono sólido circular recto de radio r y altura h.

10.3 Cálculo de la presión hidrostática

23. Una alberca de 20 metros de largo y 8 metros de ancho tiene su fondo inclinado de tal manera que la profundidad de la alberca en un extremo es de 1 metro y en el extremo opuesto es de 3 metros. Encuentre la fuerza total del agua sobre el fondo cuando la alberca está llena.

24. La superficie de una cortina de una presa está inclinada y forma un ángulo de 30 grados con la horizontal; tiene la forma de un trapezoide isósceles de 50 metros en el coronamiento y 25 metros de ancho en el fondo, con una altura inclinada de 35 metros medidos sobre la pared. Calcule la presión del líquido sobre la cortina cuando la presa está llena.

25. Cada uno de los extremos de un depósito horizontal de aceite es una elipse cuyo eje mayor tiene 12 metros y 6 metros su eje vertical. Calcule la presión del aceite sobre los extremos cuando se encuentra lleno a la mitad de su capacidad, si el aceite pesa 2 Kilogramos por litro.

26. Aplicando la definición de la integral definida, determine el área A de la figura acotada por $y = |x-1|$ y $y = 3 - |x|$.

27. Discuta acerca de la posibilidad de calcular directamente el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ o de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = \rho^{2/3}$.

Respuestas y sugerencias

2. La región en cuestión se escribe

$$A = \left\{ (x, y) \text{ con } x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ y } \arccos x \leqslant y \leqslant \operatorname{arcsen} x \right\}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Área de } A &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\arccos x - \operatorname{arcsen} x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x(\arccos x - \operatorname{arcsen} x) - 2\sqrt{1-x^2} \right] \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= -\sqrt{2} + 2
\end{aligned}$$

3. Dado un valor de a, el área determinada por la parábola $y = x^2 + 1$ al cortar el rectángulo tiene por valor

$$A = a(a^2 + 1) - \int_0^a (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$$

y será igual a la mitad del área del rectángulo si

$$\int_0^a (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a^3 + a),$$

es decir, si

$$\frac{1}{3}a^3 + a = \frac{1}{2}(a^3 + a),$$

de donde se obtiene que

$$a = \sqrt{3}.$$

4. El área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, es

$$A=\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a}=\pi ab.$$

6. La región en cuestión es simétrica respecto al eje de las abscisas y con respecto al eje de las ordenadas. Por otro lado, la región intersecta al eje de las abscisas en los intervalos $[-1,0]\cup[0,1]$; luego, el valor del área de la región es

$$A=4\int_0^1\sqrt{x^2-x^6}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

7. Calculando la longitud de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ sobre el intervalo $[-r,r]$, se tiene que la longitud L de la circunferencia es igual a $L=2\displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=2r^2\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}\Big|_{-r}^{r}=2\pi r.$

9. Volumen del tetraedro$=\dfrac{1}{6}$.

10. Aplicando la fórmula para el cálculo de volúmenes de revolución generados por gráficas de funciones al girar alrededor del eje de las ordenadas se tiene

$$V=2\pi\int_0^1 2x^2dx=\frac{4\pi}{3}.$$

12. Para el cálculo de la superficie de revolución, consideremos el problema equivalente para la superficie generada por la curva $x^2+(y-r)^2=r^2$ al girarla alrededor del eje de las abscisas.

$$A=2\pi\int_{-r}^{r}\frac{r(r+\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x}-2\pi\int_{-r}^{r}\frac{r(r-\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=4\pi^2r^2.$$

16. El sólido en cuestión se obtiene (ver figura 10.2) como unión del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje de las abscisas la gráfica de la curva $(x-R)^2+y^2=r^2$ en el intervalo $\left[R-r,R-\dfrac{r^2}{2R}\right]$ y el sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje de las abscisas la curva $x^2+y^2=R^2$ en el intervalo $\left[R-\dfrac{r^2}{2R},R\right]$, de tal manera que el volumen de la intersección de las dos esferas es

$$V=\pi\int_{R-r}^{R-\frac{r^2}{2R}}(r^2-(x-R)^2)\,\mathrm{d}x+\pi\int_{R-\frac{r^2}{2R}}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi r^3}{12}\left(8-\frac{3r}{R}\right).$$

14. El volumen generado tiene la forma

$$V = \pi \int_0^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = b^2 \quad \text{para} \quad b > 0.$$

Derivando con respecto a b, se tiene

$$\pi f^2(b) = 2b.$$

Luego,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}.$$

15a. La parte de la esfera que queda al hacerse el agujero, es el volumen que resulta de girar alrededor del eje de las ordenadas el semiarco de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ entre los puntos $(r, \sqrt{R^2 - r^2})$ y $(r, -\sqrt{R^2 - r^2})$. Ver figura 10.1. Aplicando la fórmula para el cálculo de volúmenes de revolución generados por la gráfica de una función alrededor del eje de las ordenadas, se tiene

$$V = 4\pi \int_r^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}\pi(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_r^R = \frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

15b. $r = R\sqrt{1 - 4^{-\frac{1}{3}}}$

17a. Tomemos el cilindro de radio R cuyo eje coincide con el eje z, perpendicular al plano xy. Tomemos el otro cilindro de modo que su eje coincida con el eje de las abscisas y de radio $r < R$. Consideremos la región R_z que se determina en el plano colocado a una altura z y paralelo al plano xy con los puntos en la intersección de los dos cilindros. Esa región es, para cada $-r \leqslant z \leqslant r$,

$$R_z = \Big\{(x, y, z) \text{ con } -\sqrt{R^2 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2 - y^2}, \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2 - z^2}\Big\}$$

y tiene por área

$$\begin{aligned}
\text{Área de } R_z &= 4\int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\left(y\sqrt{R^2 - y^2} + r^2 \operatorname{arcsen}\frac{y}{R}\right)\Big|_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \\
&= 2\left(\sqrt{r^2 - z^2}\sqrt{R^2 - r^2 + z^2} + r^2 \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{R}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, integrando estas áreas en el intervalo $[-r, r]$, obtenemos la fórmula buscada:

$$V = 4\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - z^2}\sqrt{R^2 - r^2 + z^2} + r^2 \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{R}\right)\mathrm{d}z.$$

17b. En el caso particular $r = R$, se tiene

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^r z\sqrt{r^2 - z^2} + r^2 \operatorname{arcsen}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\, \mathrm{d}z = \\ &= \frac{4}{3}r^3 + 4r^3 \int_0^1 \operatorname{arcsen}\sqrt{1 - u^2}\, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{4}{3}r^3 + 4r^3 \int_0^1 \arccos u \, \mathrm{d}u = 4r^3 (u \arccos u - \sqrt{1 - u^2})\Big|_0^1 = \\ &= \frac{16}{3}r^3. \end{aligned}$$

18a. $V(h) = l\left\{\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{h}{r}\right) + (h - r)\sqrt{h(2r - h)}\right\}$

18b. $V(h) = \frac{la}{b}\left\{\frac{\pi b^2}{2} - b^2 \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{h}{r}\right) - (b - h)\sqrt{h(2r - h)}\right\}$

21a. $m = \int_a^b \rho(x)(g(x) - f(x))\, \mathrm{d}x$

21b. $m = \frac{1}{3}k\pi a^3$

22b. El centroide se encuentra en el punto $\left(\frac{19}{9}, -\frac{1}{3}\right)$.

22c. El centroide se encuentra en el punto $\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)$.

22d. El centroide se encuentra sobre el eje de simetría del cono, a un cuarto de la longitud de la altura medida desde la base del cono.

26. $\mathrm{A} = 4\ \mathrm{u}^2$.

Capítulo

11

Ecuaciones diferenciales elementales

Como una introducción al tema de ecuaciones diferenciales, se propone una serie de problemas sobre este tópico para revisar los distintos métodos y conceptos asociados. Se proponen ejercicios y problemas de aplicación elementales de ecuaciones de primero y segundo orden.

11.1 Ecuaciones de primero y segundo orden

Ejercicios

1. Dada una ecuación diferencial de la forma

$$a(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + b(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + y(x) = 0,$$

encuentre funciones $a(x)$ y $b(x)$ tales que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$ sean soluciones de la ecuación.

2. (a) Pruebe que si $y(x)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 2xy(x) + 2x\sqrt{y(x)}, \quad x > 0,$$

entonces la función $z(x) = \sqrt{y(x)}$ es solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) = xz(x) + x, \quad x > 0.$$

(b) Resolviendo la ecuación para $z(x)$, encuentre la solución $y(x)$ de la primera ecuación tal que $y(1) = 1$.

3. (a) Resuelva la ecuación $y(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = x$.

(b) Encuentre las soluciones $y(x)$ de la ecuación anterior tales que

i. $y(2) = 1$;
ii. $y(2) = -1$;
iii. $y(-2) = -1$.

(c) Dibuje la gráfica de las soluciones del punto 3b.

4. Encuentre la función $y(x)$ tal que

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) - 3\frac{dy}{dx}(x) + 2y(x) = x$$

y

$$y(1) = 2 \text{ y } \frac{dy}{dx}(1) = 0.$$

5. Encuentre la función $f(x)$ tal que

$$\frac{df}{dx}(x) + 2xf(x) = e^{-x^2}$$

y además $f(0) = 1$.

6. Multiplicando a ambos lados de las ecuaciones indicadas por una función apropiada, de tal manera que el lado izquierdo se exprese como la derivada de un producto donde uno de los factores es la función incógnita, encuentre todas las soluciones de las ecuaciones de primer orden siguientes.

(a) $\frac{dy}{dx} + e^x y = 3e^x$

(b) $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$

(c) $\frac{dy}{dx} - (\tan x)y = e^{\operatorname{sen} x}$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(d) $\frac{dy}{dx} + 2y = f(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, donde $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$

7. Considere la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}(x) + a(x)y(x) = f(x)y^k(x), \quad k \quad \text{constante.}$$

Si $y(x)$ es solución de la ecuación de Bernoulli, pruebe que la función

$$z(x) = y^{1-k}(x)$$

es solución de

$$\frac{dz}{dx}(x) + (1-k)a(x)z(x) = (1-k)f(x).$$

Con la información anterior, encuentre todas las soluciones de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}(x) - 2xy(x) = xy^2(x).$$

8. Si $y(x)$ es solución de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -y$, diga de qué ecuación diferencial es solución la función $z(x) = \dfrac{1}{2}y^2(x) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2(x)$.

9. Muestre que si $y(x)$ es solución de la ecuación
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0,$$
entonces la función $z(x) = \mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}y(x)$ es solución de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \left(\dfrac{b^2}{4} - a\right)z$.

10. Encuentre la solución $y(x)$ de la ecuación
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 4y(x) = 1$$
tal que $y(0) = 2$ y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -1$.

11. Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:
    (a) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + 4y(x) = \cos x$
    (b) $6\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + 5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) - 6y(x) = x$
    (c) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 5y(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + 2x^2$.

12. Halle las soluciones $y(x)$ de la ecuación diferencial
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 2y(x) = 0$$
que satisfagan las condiciones siguientes:
    (a) $y(0) = 1, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = 0$.
    (b) $y(0) = 1, \quad y(1) = -1$.
    (c) $y(0) = 1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
    (d) $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$.

13. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x)+a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)+b(x)y(x)=0 \tag{11.1}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en un intervalo I, se denomina *ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables.* Encuentre la solución $y(x)$ a la ecuación diferencial con coeficientes variables

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x)+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)=0$$

tal que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)=1$ y $y(0)=-1$.

14. (a) Demuestre que la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)+\omega^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)=F_0\cos\gamma t$$

tal que

$$y(0)=0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=0,$$

es

$$y(t)=\frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}(\cos\gamma t-\cos\omega t).$$

(b) Calcule, para cada t, el valor $\lim_{\gamma\to\omega} y(t)$.

Problemas

15. Encuentre las funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales y toman el valor señalado a la derecha.

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)+|x-2|y(x)=1, \quad y(2)=1$

(b) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x)+y(x)=|2x-1|, \quad y(1)=0.$

16. Encuentre la curva $y=f(x)$ que pasa por el punto $(1,1)$ y la pendiente de su recta normal en cada punto $(x,f(x))$ es igual a $\frac{x}{f(x)}$.

17. Sea $f(x)$ una función cuya función derivada satisface

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=f(1-x)$$

para toda $x\in\mathbb{R}$ y $f(0)=1$. Encuentre $f(1)$.

18. (a) Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación (11.1) con $y_1(x) \neq 0$ para $x \in I$. Demuestre que una función $y_2(x)$ de la forma

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

será otra solución de (11.1), si la función $v(x) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$ satisface la ecuación de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) + \delta(x)v(x) = 0,$$

donde

$$\delta(x) = a(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y_1(x)).$$

En tal caso, la función

$$y_2(x) = Ay_1(x)\int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{s}\left[a(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln y_1(t))\right]\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s,$$

donde A es una constante, es otra solución de la ecuación (11.1). Además, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes.

(b) Verifique que la función $y_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ es solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y(x) = 0.$$

(c) Aplicando el resultado obtenido en 18a, encuentre otra solución de la ecuación.

11.2 Aplicaciones elementales

19. Un tanque con 50000 litros de agua tiene disueltos 2500 gramos de sal. Para disminuir la salinidad del agua, el responsable empieza a bombear agua pura dentro del tanque a razón de 200 litros por minuto y, simultáneamente, le extrae 200 litros por minuto del agua salina. ¿En cuánto tiempo se habrá eliminado de esta manera el 99.5% de la sal que había en el tanque?

20. Un cuerpo de 2 kilogramos de peso está suspendido de un resorte cuya constante es $\frac{3}{10}$Kg/m. El sistema se sumerge en un líquido que opone una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea del cuerpo. A partir de $t = 0$, se aplica sobre el sistema una fuerza exterior $F(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Determine la ecuación de movimiento del cuerpo si éste se suelta a partir del reposo desde un punto que está a 1 metro debajo del punto de equilibrio.

21. Ley de acción de masas.

    (a) Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia química C. La rapidez o velocidad de la reacción es proporcional al producto de las cantidades que en cada instante quedan de A y B (es decir que no se han convertido todavía en C). Inicialmente hay 40 gramos de A y 50 gramos de B y por cada gramo de B se requieren 2 gramos de A para formar C. Se observa que se forman 10 gramos de C en 5 minutos ¿Cuánto se forma en 20 minutos? ¿Cuál es la cantidad límite de C después de un tiempo largo? ¿Cuánto queda de las substancias A y B después de un tiempo largo?

    (b) Resuelva el problema anterior si inicialmente hay 100 gramos de la sustancia A. ¿Cuánto demora en formarse la mitad de la sustancia química C?

    (c) Obtenga la solución de la ecuación

    $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k(\alpha - y)(\beta - y)$$

    que rige la dinámica de las reacciones químicas, en los dos casos posibles, $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq \beta$.

22. (a) Un objeto de masa m cae cerca de la superficie de la tierra y es desacelerado por la fricción de la atmósfera, la cual opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del cuerpo, de tal manera que, de acuerdo a la Ley de Newton, su función de velocidad $v(t)$ satisface la ecuación

    $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv,$$

    donde g es la aceleración proporcionada por la fuerza de gravedad. Suponiendo que el objeto cae desde el reposo, es decir con velocidad inicial cero, encuentre la velocidad $v(t)$ para $t > 0$ y encuentre el límite de $v(t)$ cuando $t \to \infty$.

    (b) Repita el ejercicio 22a suponiendo ahora que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Respuestas y sugerencias

1. Sustituyendo cada una de las funciones $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$, en las ecuaciones, se tiene

$$b(x) + x = 0, \qquad 2a(x) + 2b(x)x + x^2 = 0,$$

de donde
$$b(x) = -x, \qquad a(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x.$$

2. La ecuación lineal no homogénea $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) = xz(x) + 1, \quad x \in (0,1)$, se puede escribir en la forma
$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) - xz(x)\right) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$
o
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}z(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}),$$
de donde
$$z(x) = -1 + c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$
y entonces las soluciones de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 2xy(x) + 2x\sqrt{y(x)}$ son de la forma
$$y(x) = \big(-1 + c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\big)^2.$$
La solución tal que $y(1) = 1$ es
$$y(x) = -1 + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-x^2)}.$$

4. Como primer paso, abordemos la solución de la ecuación lineal homogénea
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 2y(x) = 0$$
e introduzcamos la función $z(x)$ mediante la expresión
$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}z(x),$$
donde $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea, y encontremos valores para α de tal manera que $z(x)$ sea solución de una ecuación que se pueda resolver fácilmente. Sustituyendo y simplificando, se tiene la relación
$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}(x) + (-3 + 2\alpha)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) + [\alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha]z(x) = 0.$$
Si tomamos α de tal manera que
$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0,$$
es decir
$$\alpha = 1, \quad \alpha = 2,$$
entonces la función $z(x)$ deberá satisfacer la ecuación
$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}(x) + (-3 + 2\alpha)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Integrando con respecto a x, obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) = a\mathrm{e}^{(3-2\alpha)x}$$

cuya solución es de la forma

$$z(x) = \frac{a}{3-2\alpha}\mathrm{e}^{(3-2\alpha)x} + b, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Entonces, son soluciones las funciones $y_1(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{x}$, $y_2(x) = -a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x}$, obtenidas para los valores $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$. En general, las soluciones de la ecuación homogénea son de la forma

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Busquemos ahora una solución particular de la ecuación no-homogénea. En este caso basta proponer una función lineal

$$y_{\text{part}}(x) = ax + b,$$

de tal manera que, al sustituir en la ecuación no-homogénea, se tiene

$$-3a + 2(ax + b) = x,$$

de donde

$$a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{3}{4},$$

y así, una solución particular será

$$y_{\text{part}}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

Entonces, las soluciones de la ecuación no-homogénea son de la forma

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Así, la solución que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 2$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = 0$, será aquélla tal que $c_1\mathrm{e} + c_2\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 2$, y $c_1\mathrm{e} + 2c_2\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} = 0$, es decir

$$c_1 = \frac{2}{\mathrm{e}}, \quad c_2 = \frac{-5}{4\mathrm{e}^2},$$

y la función buscada es

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} + \frac{-5}{4}\mathrm{e}^{2(x-1)} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

5. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por la función e^{x^2}, se tiene

$$\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + 2x\mathrm{e}^{x^2}f(x) = 1.$$

El lado izquierdo es la derivada del producto $\mathrm{e}^{x^2}f(x)$, y entonces podemos reescribir la ecuación anterior en la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{x^2}f(x)\big) = 1.$$

Integrando, obtenemos

$$\mathrm{e}^{x^2}f(x) = x + c,$$

y, tomando en cuenta que $f(0) = 1$, se tiene $c = 1$. Así, la solución es

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-x^2}.$$

6a. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por la función $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, se tiene

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x y = 3\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x},$$

que se escribe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}y(x)\big) = 3\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(3\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\big),$$

de donde, al aplicar el teorema del valor medio, se tiene

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}y(x) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + c.$$

Las soluciones son de la forma $y(x) = 3\exp(-\mathrm{e}^x) + c$ con c constante.

6b. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por la función e^{x^2}, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{x^2}y(x)\big) = x\mathrm{e}^{-x^2+x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

Entonces

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2} + c\mathrm{e}^{-x^2},$$

con c constante.

6c. $y(x) = (\sec x)e^{\operatorname{sen} x} + c\sec x$, con c constante.

6d. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por la función e^{2x}, podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{2x}y(x)\big) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x}(1-|x|) & \text{si} \quad |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

o, equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{2x}y(x)\big) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x}(1+x) & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{2x}(1-x) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{2x}y(x)\big) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right) & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Luego,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + c_1\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} + c_2\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ c_3\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x < -1 \\ c_4\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$$

y ahora $c_3 = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + c_1$, $\dfrac{1}{4} + c_1 = \dfrac{3}{4} + c_2$, $c_4 = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2} + c_2$. Finalmente, todas las soluciones son de la forma

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + c_1\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} + \left(c_1 - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \left(-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + c_1\right)\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x < -1 \\ \left(-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2} + c_1 - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

8. Tomando derivadas,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z = y(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

es decir, para cada solución $y(x)$ de la ecuación original, se tiene

$$\frac{1}{2}y^2(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2(x) = c.$$

11. Sean c_1 y c_2 dos constantes:

11a. $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{3}\cos x$

11b. $y(x) = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{-3}{2}x} - \frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$

11c. $y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{3}{10}e^{-x} + \frac{44}{125} + \frac{16}{25}x + \frac{2}{5}x^2.$

16. La curva $y(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{-1}{\frac{dy}{dx}(x)} = \frac{x}{y(x)},$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{1}{x}y(x).$$

Resolviendo la ecuación y tomando en cuenta la condición inicial, se tiene

$$y(x) = \frac{c}{x}.$$

17. De la propiedad de la función, al tomar la segunda derivada se tiene

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = -\frac{df}{dx}(1-x) = -f(x).$$

Entonces

$$f(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Tomando en cuenta que $f(0) = 1$, se tiene $f(x) = A = 1$. Por otro lado,

$$\frac{d}{dx}(\cos x + B\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x + B\cos x = \cos(1-x) + B\operatorname{sen}(1-x)$$

implica que

$$-\operatorname{sen} x + B\cos x = \cos 1\cos x + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 1 + B\operatorname{sen} 1\cos x - B\operatorname{sen} x\cos 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} -1 - \operatorname{sen} 1 + B\cos 1 &= 0 \\ B - \cos 1 - B\operatorname{sen} 1 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B = \frac{1 + \operatorname{sen} 1}{\cos 1}$$

y

$$f(x) = \cos x + \frac{1 + \operatorname{sen} 1}{\cos 1}\operatorname{sen} x,$$

$$f(1) = \frac{1 + \operatorname{sen} 1}{\cos 1}.$$

18a. Sustituyendo en (11.1), la función $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ será una solución si

$$2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) + y_1(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}(x) + a(x)y_1(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Haciendo ahora

$$v(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x),$$

se tiene que la función $v(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) + \left[a(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y_1(x))\right]v(x) = 0;$$

es decir,

$$v(x) = A\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\left[a(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln y_1(t))\right]\mathrm{d}t\right)$$

y entonces

$$u(x) = A\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}\left[a(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln y_1(t))\right]\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.$$

18c. Aplicando el resultado de 18a, se tiene $y_2(x) = u(x)\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$, donde

$$\begin{aligned}
u(x) &= A\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}\left[\frac{1}{t} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\ln t)\right]\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\\
&= A\int_{x_0}^{x}\exp(-2(\ln\operatorname{sen} s))\,\mathrm{d}s\\
&= A\int_{x_0}^{x}\csc^2 s\,\mathrm{d}s = -A\cot x
\end{aligned}$$

y la solución buscada tiene la forma

$$y_2(x) = -A\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

19. Denotemos por $y(t)$ la cantidad de sal en el recipiente en el tiempo t. Luego,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{-200y(t)}{50000} = -\frac{1}{250}y(t)$$

y resolviendo esta ecuación se tiene

$$y(t) = y(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{250}t} = 2500\mathrm{e}^{-\frac{1}{250}t};$$

entonces restará un 0.5% de sal, o equivalentemente 125 gramos, cuando el tiempo sea tal que

$$2500\mathrm{e}^{-\frac{1}{250}t} = 125,$$

es decir, cuando

$$t = 250\ln 20.$$

21. Denotemos por $A(t)$ y $B(t)$ las cantidades de A y B en el tiempo t. Si la cantidad de la mezcla en el tiempo t es $C(t)$, se tiene $A(t) = 40 - 2C(t)$ y $B(t) = 50 - C(t)$. La ley de la reacción toma la forma

$$\frac{dC}{dt} = k(40 - 2C(t))(50 - C(t)).$$

Integrando por fracciones parciales, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^t k\,\mathrm{d}t &= \int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}(t)}{(40-2C(t))(50-C(t))}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{C(0)}^{C(t)} \frac{\mathrm{d}u}{(40-2u)(50-u)} = \\ &= \int_{C(0)}^{C(t)} \left(\frac{1}{30(40-2u)} - \frac{1}{60(50-u)}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

y

$$60kt = \ln\frac{4}{5}\frac{50 - C(t)}{40 - 2C(t)}.$$

Luego,

$$C(t) = 20\frac{e^{60kt}}{e^{60kt} - 1}.$$

Como $C(5) = 10$, se tiene

$$k = \frac{1}{300}\ln\frac{4}{5}\frac{50-10}{40-20} = \frac{1}{300}\ln\frac{16}{15}.$$

Por otro lado, a los 20 minutos se tendrá

$$\ln\left(\frac{16}{15}\right)^4 = \ln\frac{4}{5}\frac{50 - C(20)}{40 - 2C(20)}$$

y

$$C(20) = \frac{20(16^4 - 15^4)}{16^4 - 2\cdot 15^4}.$$

Finalmente, cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = 20$$

y entonces restarán de las substancias A y B, las cantidades $A = 0$ y $B = 30$.

Capítulo

12

Series

Este conjunto de ejercicios y problemas está orientado a la aplicación de los distintos criterios para analizar la convergencia o divergencia de series de números reales, así como de series de potencias. También se proponen varios ejercicios y problemas para el cálculo de la suma de series convergentes, ya sea transformándolas en series telescópicas o en problemas de evaluación de funciones expresables como series de potencias. Se incluyen algunos problemas de análisis matemático para fortalecer la comprensión de los conceptos y el conocimiento del comportamiento posible de las series.

12.1 Convergencia de Series

Ejercicios

1. Determine la convergencia de las series siguientes.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+1}{2k^3+3k+5}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3-4k+1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3k+2}.$

2. Encuentre la suma de las series siguientes.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!}.$

3. Escriba la expresión general de la serie cuyos primeros sumandos se escriben a continuación.

   (a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

   (b) $\frac{3}{2^2} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \frac{11}{25 \cdot 36} + \cdots$

   (c) $\frac{4}{1 \cdot 5} - \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} - \frac{4}{13 \cdot 17} + \frac{4}{17 \cdot 21} - \cdots$

4. Haciendo uso de la definición de convegencia de una serie, justifique en cada caso la convergencia o divergencia de las series siguientes.

   (a) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$

   (b) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$

5. Aplicando los criterios para convergencia, determine la convergencia o divergencia de las series siguientes.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k \operatorname{sen}(\frac{1}{k})$

   (e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (\sqrt{2})^i$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

6. Determine si las series telescópicas siguientes convergen o divergen.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\arctan(k+1) - \arctan k)$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+3}} \right)$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k}$.

7. Escribiéndolas como series telescópicas, encuentre la suma de las series dadas a continuación.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

8. Examine la convergencia de las series siguientes comparándolas con series conocidas.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^4 - k}}$.

9. Pruebe que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $a_k \geqslant 0$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} a_k$ converge.

10. Determine la convergencia o divergencia de las series de términos positivos siguientes.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 \mathrm{e}^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

11. Determine la convergencia absoluta, la convergencia o la divergencia de las series siguientes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2-1)}{(n^2+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$.

12. Aplicando el criterio de la integral, establezca la convergencia o divergencia de las series siguientes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$, donde a es un número natural.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, con $p>1$ (y con $p \leqslant 1$).

Problemas

13. Evalúe las series

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2008^{2^n} - 2008^{-2^n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$.

14. (a) Pruebe que si para una serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se tiene que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} ka_k = L > 0$, entonces la serie no converge.

(b) Demuestre que si una serie arbitraria $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es tal que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^2 a_k = L$, entonces la serie converge.

15. Sea $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos.

(a) Aplicando la fórmula de Abel, pruebe la validez de la expresión siguiente para las sumas parciales de la serie:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1}.$$

(b) Supongamos ahora que la sucesión de términos positivos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente y que la sucesión de sus sumandos $\{a\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente. Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ es también convergente y que

$$\lim_{k\to\infty} ka_k = 0.$$

16. Encuentre la constante c_0 tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(cn)^n}$ converge para $c > c_0$ y diverge para $0 < c < c_0$.

17. Dé un ejemplo de una serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{n+1}$, $a_n > 0$, que sea divergente con $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Sugerencia: Considere la serie $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$.)

18. Diga por qué la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^{n^2}}$ converge a un número irracional.

19. Diga si cada uno de los enunciados siguientes es falso o verdadero.

    (a) Si $a_n > c > 0$ para cada n, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

    (b) Si $a_n < 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

    (c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

    (d) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

    (e) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

    (f) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es también absolutamente convergente.

    (g) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

    (h) Toda serie se puede escribir como serie telescópica.

12.2 Series de Potencias

Ejercicios

20. Considere la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Aplicando el criterio del cociente de de D'Alembert, si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es igual a $\frac{1}{r}$. Análogamente, aplicando el criterio de Cauchy, si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es igual a $\frac{1}{r}$.

    Haciendo uso de los criterios anteriores, calcule el radio de convergencia de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^n}$.

Si $f(x)$ es una función con derivadas de todos los órdenes, a la serie de potencias de la forma

$$P(x_0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0)(x - x_0)$$

se le denomina la *serie de Taylor de la función $f(x)$ en el punto x_0*. En el intervalo de convergencia de la serie de Taylor, la función coincide con su serie de Taylor.

21. Encuentre la serie de Taylor de las funciones siguientes en el punto marcado a la derecha y determine el intervalo de convergencia de tales series.

    (a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ en el punto $x_0 = 3$.

    (b) $f(x) = \sqrt{2+x}$ en el punto $x_0 = 0$.

22. Diga para qué valores de x las series siguientes convergen.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{n}$

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^{\frac{1}{3}} 4^n}$

    (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$.

23. Diga, en cada uno de los casos siguientes, en qué intervalo es válida la representación para la función dada a la izquierda.

    (a) $\displaystyle\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

    (b) $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

24. A partir de la representación de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en el intervalo $(-1, 1)$ mediante la serie de potencias

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

encuentre la representación de las funciones siguientes como series de potencias en x y señale el dominio de validez de esa representación.

(a) $g(x) = \dfrac{1}{2-x}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$

(c) $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

(d) $g(x) = \ln(2-x)$.

Problemas

25. Determine el intervalo de convergencia y su suma en los puntos de ese intervalo, para cada una de las series de potencias siguientes.

(a) $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n$

(b) $1 \times 3 - 2 \times 4x + 3 \times 5x^2 - 4 \times 6x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+2) x^{n-1}$

(c) $2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2(n-1)}$.

26. Aplicando la derivada a una serie de potencias conveniente, evalúe la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$.

27. (a) Pruebe que $\ln n! \geqslant \displaystyle\int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t = n \ln n - n + 1$.

(b) ¿Para qué valores de x la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ converge absolutamente?

28. Supongamos que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ tiene como intervalo de convergencia a $(-2, 2)$. Encuentre el intervalo de convergencia de las series siguientes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k (x-1)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x^{kn}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{n^2}$.

Respuestas y sugerencias

1a. Primero comprobaremos si el límite de la sucesión de sumandos converge a cero:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^3+1}{2k^3+3k+5} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k^3}}{2+\frac{3}{k^2}+\frac{5}{k^3}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Por lo tanto, la serie no converge.

1b. Por ser una serie de términos positivos, aplicaremos el criterio del cociente para obtener

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

y, por lo tanto, la serie converge.

1c. Aunque el límite de la sucesión de sumandos es cero, por el criterio de comparación tenemos que

$$\frac{k^2}{k^3-4k+1} = \frac{1}{k-\frac{4}{k}+\frac{1}{k^2}} > \frac{1}{2k}$$

si $k > 6$. Luego,

$$\sum_{k=6}^{n} \frac{k^2}{k^3-4k+1} > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

y como la serie de la derecha es divergente, por el criterio de comparación, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3-4k+1}$ es también divergente.

1d. La serie es alternante y la sucesión de los valores absolutos de la sucesión de sus sumandos es decreciente; por el criterio sobre sucesiones alternantes dado en el capítulo 12 de *Fundamentos del Cálculo*, se concluye que la serie es convergente.

2a. Tomando en cuenta que $(-\infty, \infty)$ es el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x,$$

observamos que

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

2b. Escribiendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!}$$

y considerando la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x\mathrm{e}^x,$$

que converge en $(-\infty, \infty)$, derivamos para obtener

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{(k-1)!} = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x,$$

y evaluando en $x = 1$, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2\mathrm{e}.$$

2c. Si observamos que $a_n = \dfrac{2n+1}{2^n n!} = \dfrac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \dfrac{1}{2^n n!}$, nos damos cuenta que la j-ésima suma parcial es

$$\sum_{k=1}^{j} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2^{j+1}(j+1)!}$$

y entonces se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!} = \frac{3}{2}.$$

7a. Busquemos una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la forma

$$b_n = \frac{an+c}{3^n}$$

tal que

$$\frac{n}{3^n} = b_{n+1} - b_n.$$

Sustituyendo, se tendrá

$$\frac{n}{3^n} = \frac{a(n+1)+c}{3^{n+1}} - \frac{an+c}{3^n},$$

de donde $a = -\dfrac{3}{2}$ y $c = -\dfrac{3}{4}$. Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{3}{2}(n+1)-\frac{3}{4}}{3^{n+1}} - \frac{-\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}}{3^n} \right)$$

y tomando en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}}{3^n} = 0,$$

tenemos finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

7b. De manera análoga a 7a, busquemos ahora una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la forma

$$b_n = \frac{an^2+bn+c}{2^{n-1}}$$

tal que

$$\frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = b_{n+1} - b_n,$$

es decir,

$$\frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{a(n+1)^2+b(n+1)+c}{2^n} - \frac{an^2+bn+c}{2^{n-1}},$$

de donde $a = -2$, $b = -6$, $c = -8$ y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2(n+1)^2-6(n+1)-8}{2^n} - \frac{-2n^2-6n-8}{2^{n-1}} \right].$$

Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16.$$

7c. Basta comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

11a. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es convergente por ser alternante y la sucesión de sumandos, decreciente.

11b. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$ es divergente ya que la serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ es divergente al ser mayor término a término que la serie divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} > \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

11c. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}$ es divergente ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}$ no existe.

11d. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{(n^2+1)}$ es divergente ya que $\displaystyle\frac{(-1)^n(n^2-1)}{(n^2+1)} = \frac{(-1)^n(1-\frac{1}{n^2})}{(1+\frac{1}{n^2})}$ y, por lo tanto, la sucesión de sumandos tiende a ± 1 cuando $n \to \infty$.

11e. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$ es convergente ya que para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ se tiene $\operatorname{sen} x < x$, luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{k} \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

y, por lo tanto, la serie inicial es absolutamente convergente.

11f. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$ es divergente ya que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1$ y entonces $\displaystyle\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} > \frac{1}{2}$ para k suficientemente grande, es decir $\operatorname{sen}\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{2k}$ para k suficientemente grande y aplicando el criterio de comparación se tiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

13a. La serie se puede escribir en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$$

con

$$x = \frac{1}{2008};$$

ésta es una serie telescópica que converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2008^{2^n} - 2008^{-2^n}} = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{1}{2008}}{1-\frac{1}{2008}} = \frac{1}{2007}.$$

13b. Considere la suma de potencias $\sum_{k=1}^{n} x^k$ y observe que la suma dada corresponde a la derivada de esta suma valuada en $x = 2$. Teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

la suma del problema tiene por valor

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

14a. Como consecuencia de que $\lim_{k\to\infty} ka_k = L > 0$, se tiene que existe una etiqueta N tal que $ka_k > \frac{L}{2} = \lambda$ para toda $k > N$. Luego, $a_k > \frac{1}{k}\,\lambda$ para toda $k \geqslant N$ y entonces se tendrá que

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k > \lambda \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k}$$

y, tomando en cuenta que $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, por el criterio de comparación se tendrá también que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. Note que la condición $\lim_{k\to\infty} ka_k = L > 0$ se puede reemplazar por la condición

$$\inf \{ka_k \text{ con } k = 1, 2, \ldots\} > 0$$

y sigue siendo verdadera la no-convergencia de la serie.

14b. Si $\lim_{k\to\infty} k^2 a_k = L$, entonces se tiene $\lim_{k\to\infty} k^2 |a_k| = |L|$ y entonces existe una etiqueta N tal que

$$|a_k| \leqslant \frac{|L| + 1}{k^2}, \quad \text{si } k \geqslant N.$$

Luego, se tiene la estimación

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant (|L| + 1) \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

y al ser $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergente, se tiene que la serie inicial será absolutamente convergente y, por lo tanto, será convergente.

15b. A partir de la fórmula $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1}$ observamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ es una serie de términos positivos que resulta acotada por la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Luego, es una serie convergente y esto nos lleva a que $\{ka_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y, ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, necesariamente se tendrá que $\lim_{k\to\infty} ka_k = 0$.

16. Basta aplicar el criterio del cociente para tener

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(cn)^n}{(cn+c)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(cn+c)(1+\frac{1}{n})^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})}{(c+\frac{c}{n})(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{c\mathrm{e}}.$$

Luego, la serie converge si $c\mathrm{e} < 1$, es decir si $0 < c < c_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Análogamente, la serie diverge si $c > c_0$.

17. La serie $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$ es una serie alternante cuya forma general se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

con $a_{2n} = -\frac{1}{2^{2n}}$ y $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$. Mientras la suma de los sumandos con etiqueta par converge, la suma de los sumandos con etiqueta impar crece sin límite; luego, la serie inicial no puede ser convergente. Por otro lado, la sucesión de sumandos tiende a cero y es decreciente.

18. Por el criterio del cociente para series positivas es fácil ver que la serie es convergente. Por otro lado, esa serie no es otra cosa que una expansión decimal no periódica, por lo tanto su límite es un número irracional.

19a. Verdadero

19b. Verdadero

19c. Verdadero

19d. Falso. Considere la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

19e. Verdadero

19f. Verdadero

19g. Verdadero

20a. Al aplicar el criterio del cociente a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{\sqrt{n+2}}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}|x|^{2n+2}}{\sqrt{n+3}|x|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}|x|^2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = |x|^2$$

y, por lo tanto, la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1,1)$.

20b. Al aplicar el criterio del cociente a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^n}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n|4x+1|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}|4x+1|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4|x+\frac{1}{4}|}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} = 0$$

y, por lo tanto, la serie es absolutamente convergente en toda la recta real; es decir, su intervalo de convergencia es $(-\infty,\infty)$.

21a. Para cada k natural se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^k \mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x^k}(3) = \mathrm{e}^3.$$

Entonces, la serie de Taylor se escribe

$$P(3,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^3}{k!}(x-3)^k,$$

la cual tiene por intervalo de convergencia toda la recta real, ya que al aplicar el criterio del cociente se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!}|x-3| = 0 \text{ para toda } x.$$

Entonces la serie de Taylor es absolutamente convergente en toda la recta real, y se tiene la representación

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^3}{k!}(x-3)^k, \quad \text{para toda} \quad x \in \mathbb{R}.$$

21b. Para cada k natural se tiene

$$\frac{d^k\sqrt{2+x}}{dx^k}(0) = (-1)^k(k-1)!2^{-k-\frac{1}{2}}.$$

Entonces, la serie de Taylor se escribe

$$P(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{-k-\frac{1}{2}}}{k} x^k,$$

la cual tiene por intervalo de convergencia toda la recta real, ya que al aplicar el criterio del cociente se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{2(k+1)}|x| = \frac{|x|}{2},$$

y, por lo tanto, la serie converge absolutamente en el intervalo (-2,2) y allí se tiene la representación

$$\sqrt{2+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{-k-\frac{1}{2}}}{k} x^k, \text{ para } x \in (-2,2).$$

25a. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^n(4x)^{n+1}|}{|(-1)^n(4x)^n|} = \lim_{n\to\infty} |4x| = 4|x|,$$

el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Por otro lado, podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{1-(4x)^2} - \frac{4x}{1-(4x)^2} = \frac{1}{1+4x}.\end{aligned}$$

25b. Tomando en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n-1}(n+1)(n+3)x^n|}{|(-1)^{n-1}n(n+2)x^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+3}{n^2+2n}|x| = |x|,$$

el intervalo de convergencia de la serie es $(-1,1)$. Por otra parte, podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+2)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+3)x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+4)x^{2n+1}.$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+3)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^{2n+3} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{x^3}{1-x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^3}{1-x^2}.$$

Análogamente

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+4)x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^{2n+3} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2n+2}\right) =$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{x^3}{1-x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{1-x^2}$$

y, finalmente, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+2)x^{n-1} = \frac{1-x}{x}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{x^3}{1-x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{1-x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\frac{x^3}{1-x^2}.$$

25c. Tomando en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|2(n+1)x^{2n}|}{|2nx^{2n-2}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x|^2 = |x|^2,$$

se tiene que el intervalo de convergencia es $(-1,1)$. Por otro lado, la serie se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2(n-1)} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2n} =$$
$$= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x^2)^2}.$$

27a. La suma

$$\ln n! = \ln n + \ln(n-1) + \cdots + \ln 2$$

es la suma suma superior de Darboux-Riemann correspondiente a la partición

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n$$

del intervalo $[1,n]$ para la función $\ln x$. Entonces se tiene

$$\ln n! \geqslant \int_1^n \ln t dt = t\ln t\Big|_1^n - t\Big|_1^n = n\ln n - n + 1.$$

Tabla de antiderivadas e integrales

Reglas generales de integración

1. $\displaystyle\int (af(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a\neq 0, \text{ constante})$

2. Integración por partes:
$$\int f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

3. Integración por sustitución:
Si $\displaystyle\int h(y)\,\mathrm{d}y = f(y)+c$ entonces $\displaystyle\int h(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \left(\int h(y)\,\mathrm{d}y\right)\circ g(x)$

4. Integración por sustitución trigonométrica:
Si $h(y)$ es una función continua,
   (a) $\displaystyle\int h(\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x = \left(\int h(\cos\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\circ(\text{arcsen}x)$
   (b) $\displaystyle\int h(\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = \left(\int h(\sec\theta)\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\circ(\text{arctan}x)$
   (c) $\displaystyle\int h(\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x = \left(\int h(\tan\theta)\sec\theta\tan\theta d\theta\right)\circ(\text{arcsec}\,x)$

5. Integración de funciones racionales:
Si $s(x)$ y $t(x)$ son polinomios, entonces
$$\int \frac{s(x)}{t(x)}\,\mathrm{d}x = U(x) + a\ln V(x) + b\arctan W(x) + c$$
donde $U(x), V(x)$ y $W(x)$ son funciones racionales y $a, b, c \in \mathbb{R}$.
En particular, si m y n son números naturales con $n>1$ y a, b y c son números reales, se tienen los casos siguientes:
   (a) $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^m}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} a\ln|x-b| \text{ si } m=1, \\ \dfrac{a}{1-m}\dfrac{1}{(x-b)^{m-1}} \text{ si } m>1. \end{cases}$
   (b) $\displaystyle\int \frac{x-c}{[(x-c)^2+k^2]^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-n)}\frac{1}{[(x-c)^2+k^2]^{n-1}}$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \ln|f(x)| + c$

7. $\displaystyle\int f(x) \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + c$

8. $\displaystyle\int [f(x)]^n \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

Antiderivadas de algunas funciones racionales

9. $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + c$

10. $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{si } n \neq -1$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$

12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

Antiderivadas de algunas funciones irracionales

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + c$

14. $\displaystyle\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \cos^{-1}\frac{x}{a} + c$

15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|x|}{a} + c$

16. $\displaystyle\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\csc^{-1}\frac{|x|}{a} + c$

Antiderivadas de funciones logarítmicas

17. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c$

18. $\displaystyle\int \log_b x\,\mathrm{d}x = x\log_b x - x\log_b \mathrm{e} + c$

Antiderivadas de funciones exponenciales

19. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$

20. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Antiderivadas de funciones trigonométricas

21. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$

22. $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + c$

23. $\displaystyle\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$

24. $\displaystyle\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sen} x| + c$

25. $\displaystyle\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + c$

26. $\displaystyle\int \csc x \, \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

27. $\displaystyle\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + c$

28. $\displaystyle\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + c$

29. $\displaystyle\int \sec x \, \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + c$

30. $\displaystyle\int \csc x \, \cot x \, \mathrm{d}x = \csc x + c$

31. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c$

32. $\displaystyle\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c$

33. $\displaystyle\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

34. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x$

36. $\displaystyle\int \arctan x \, \mathrm{d}x = x \, \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

Antiderivadas de funciones hiperbólicas

37. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\ dx = \cosh x + c$

38. $\displaystyle\int \cosh x\ dx = \operatorname{senh} x + c$

39. $\displaystyle\int \tanh x\ dx = \ln|\cosh x| + c$

40. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x\ dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\ dx = \arctan(\operatorname{senh} x) + c$

42. $\displaystyle\int \coth x\ dx = \ln|\operatorname{senh} x| + c$

$\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x\ dx = \tanh x + c$

Antiderivadas de funciones hiperbólicas inversas

43. $\displaystyle\int \operatorname{arcsinh} x\ dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2+1} + c$

44. $\displaystyle\int \operatorname{arccosh} x\ dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2-1} + c$

45. $\displaystyle\int \operatorname{arctanh} x\ dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + c$

46. $\displaystyle\int \operatorname{arccsch}\ x\ dx = x \operatorname{arccsch} x + \log\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right] + c$

47. $\displaystyle\int \operatorname{arcsech}\ x\ dx = x \operatorname{arcsech} x - \arctan\left(\frac{x}{x-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c$

48. $\displaystyle\int \operatorname{arccoth}\ x\ dx = x \operatorname{arccoth} x + \frac{1}{2}\log(x^2-1) + c$

Algunas integrales definidas para las que no existe una antiderivada

49. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

50. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

51. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\, dx = \frac{\pi^2}{6}$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$

53. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

54. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot n}\frac{\pi}{2}$ si n es entero par y $n \geqslant 2$.

55. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot n}$ si n es entero impar y $n \geqslant 3$.

56. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$